Shahid Beheshti University P-ISSN: 2645-4637
Journal of Financial Management Perspective E-ISSN: 2645-4645
No. 34, Summer 2021
PP: 69-94

Estimation of Conditional Value at Risk under Stochastic Volatility Levy Processes for Tehran Stock Market

Research Paper

Navideh Modarresi *, Moslem Peymany**
Moshtagh Darvishi***

Abstract[١]

Research has shown that stochastic volatility and jumps play an important role in stock price trends market, and considering these two factors has a significant impact on a better description of assets. Infinite jump Levy processes cover skewness and heavy-tailedness properties but can not present volatility clustering. By time chainging these processes by integrating the Cox-Ingersoll-Ross, it is abtained a stochastic volatility Levy processes model that are applied to determine the conditional value at risk (VaR) in this paper. Applying the fast Fourier transform, a closed form formula of probability density function is derived. Moreover, by applying Hybrid Particle Swarm Optimization algorithm, Grid search method and univariate method algorithm, the parameters are estimated. Based on the introduced model, we estimate the VaR of along total Index of Tehran Stock Exchange in 1388 to 1398 and compare it by historical simulation and Variance-Covariance approaches. The results of Back-test techniques in computing the VaR indicate that the stochastic volatility Levy processes with infinite jumps have better performance than the Variance-Covariance methods.

Keywords: Stochastic Volatility; Infinte Activity Levy Processes; Hybrid Particle Swarm Optimization Algorithm; Fast Fourier Transform.

Received: 2021.April.17, Accepted: 2021.August.17.
*Assistant Prof, Department of Financial Mathematics, Allameh Tabataba'i University, Tehran, Iran (Corresponding Author). E-Mail: n.modarresi@atu.ac.ir
** Assistant Prof, Department of Finance and Banking, Allameh Tabataba'i University, Tehran, Iran.
*** M.Sc. in Financial Engineering and Risk Management, Allameh Tabataba'i University, Tehran, Iran.

دانشگاه شهیدبهشتی
نشریه چشم‌انداز مدیریت مالی
شماره ۳۴ ـ تابستان ۱۴۰۰
ص‌ص ۹۴-۶۹

شاپای چاپی: ۴۶۳۷-۲۶۴۵
شاپای الکترونیکی: ۴۶۴۵-۲۶۴۵

مقاله پژوهشی

برآورد ارزش در معرض خطر شرطی با استفاده از فرایندهای لوی تلاطم تصادفی در بورس اوراق بهادار تهران

نویده مدرسی*، مسلم پیمانی، مشتاق درویشی*****

چکیده

پژوهش‌های نشان داده است که تلاطم تصادفی و پرش‌ها در روند بازار قیمت سهام نقش مهمی راایفا می‌کنند و در نظر گرفتن‌این دو عامل تاثیر بسزایی در توصیف بهتر دارایی‌ها دارد. فرایندهای پرش نامتناهی لوی ویژگی‌های چولگی و دم سنگینی بازده دارایی را پوشش می‌دهند اما بیانگر تلاطم خوشه‌ای نمی‌باشند. با زمان متغیر کردن‌این فرایندها توسط انتگرال فرایند کاکس ـاینگرسول ـ راس، مدل فرایندهای لوی تلاطم تصادفی بدست می‌آید که دراین مقاله در تعیین ارزش در معرض خطر شرطی به‌کار گرفته شده است. با کمک روش تبدیل فوریه سریع فرم بسته‌ای از تابع چگالی احتمال را به دست آورده شده است. همچنین با استفاده از الگوریتم بهینه‌سازی ترکیبی ازدحام ذرات پارامترهای مدل برآورد شده است. ارزش در معرض خطر شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران را در بازه زمانی ۱۳۸۸ تا ۱۳۹۸ بر مبنای مدل معرفی شده، برآورد کرده و با رویکردهای شبیه‌ساز تاریخی و واریانس ـ کوواریانس مقایسه شد. نتایج تکنیک‌های پس آزمون در مورد محاسبه ارزش در معرض خطر، حاکی از برتری مدل‌های لوی تلاطم تصادفی در مقایسه با رویکردهای شبیه‌ساز تاریخی و واریانس ـ کوواریانس است.

کلیدواژه‌ها: تلاطم تصادفی؛ فرایندهای لوی پرش نامتناهی؛ الگوریتم بهینه‌سازی ترکیبی ازدحام ذرات؛ تبدیل فوریه سریع.

تاریخ دریافت مقاله: ۱۴۰۰/۰۱/۲۸، تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۰/۰۵/۱۸.

* استادیار، گروه ریاضی مالی، دانشگاه علامه طباطبائی، تهران،ایران (نویسنده مسئول)
E-Mail: n.modarresi@atu.ac.ir
** استادیار، گروه مالی و بانکداری، دانشگاه علامه طباطبائی، تهران، ایران.
*** کارشناسی ارشد مهندسی مالی و مدیریت ریسک، دانشگاه علامه طباطبائی، تهران، ایران.

۱. مقدمه

سرمایه‌گذاران در بازارهای مالی همواره با ریسک‌های ناشی از نوسان قیمت مواجه هستند. این نوسانات و عدم اطمینان از وضعیت‌اینده، گاه باعث زیان‌ها ی شدید به‌این افراد و حتی خروج آنان از بازار و عدم رغبت سایرین به ورود به‌این عرصه شده است. فعالان بازار به دنبال یافتن راه کارهایی برای مدیریت ریسک و کنترل بیشتر بر ارزش سرمایه‌گذاری خود طی نوسانات بازار بوده‌اند، یکی از معروف‌ترین روش‌ها برای محاسبه ارزش در معرض خطر[۱] (VaR) بود. این معیار ارزیابی ریسک یکی از معیارهای کمی برای محاسبه حداکثر زیان بالقوه در یک پرتفوی حاوی دارایی‌های مالی در یک دوره زمانی خاص و نیز در یک سطح اطمینان مشخص است. یکی از روش‌های معمول برای محاسبه ارزش در معرض خطر روش واریانس ـ کواریانس است که فرض می‌کند توزیع بازده داده‌های مالی نرمال است. از آنجا که توزیع داده‌های مالی دارای ویژگی‌هایی از جمله چولگی، کشیدگی و هم چنین تلاطم خوشه‌ای[۲] هستند، مفروضات روش واریانس-کواریانس صحیح نمی‌باشد. در بازارهای مالی فرایندهای قیمت دارایی دارای پرش است و در نظر گرفتن این پرش‌ها در مدل‌سازی امری ضروری می‌باشد[۷]. دراین پژوهش سه نوع فرایند واریانس گاما[۳]، پایدار ملایم شده نرمال[۴] و پایدار ملایم شده کلاسیک [۵] برای فرایند قیمت دارایی در نظر گرفته شده است. با وجود اینکه این فرایندها توانایی نشان دادن تعداد نامتناهی پرش در واحد زمان را دارند که این ویژگی منجر به تلاطم تصادفی و لبخند تلاطم می‌شود، اما بیانگر پدیده تلاطم خوشه‌ای نیستند. برای دستیابی به‌این منظور مدل‌های تلاطم تصادفی زمان پیوسته که از آن جمله می‌توان به فرایندهای لوی زمان متغیر اشاره نمود به‌کار گرفته می‌شوند. این فرایندها که مدل‌های تلاطم تصادفی فرایندهای لوی[۶] نامیده می‌شوند توسط انتگرال فرایند کاکس-اینگرسول ـراس[۷] (CIR) زمان متغیر شده‌اند. در واقع برای زمان متغیرکردن فرایند لوی، انتگرال فرایند CIR جایگزین زمان در فرایند لوی می‌شود که هر دو ویژگی افزایشی و مثبت بودن زمان را دارد. دراین مقاله با استفاده فرایندهای تلاطم تصادفی، ارزش در معرض خطر شرطی[۸] (CVaR) محاسبه شده است. فرایندهای ترکیبی تلاطم تصادفی و لوی به دلیل انعطاف پذیری بالا توانایی بهتری در مدل‌سازی پرش‌ها و نیز خاصیت تلاطم خوشه‌ای دارند. توزیع بازده دراین پژوهش مدل تلاطم تصادفی واریانس گاما، پایدار ملایم شده نرمال و پایدار ملایم شده کلاسیک در نظر گرفته می‌شود. هر سه توزیع، توزیع‌های پایدار ملایم شده می‌باشند که ویژگی‌های مشاهده شده

---

[۱] Value at Risk
[2] Volatility Clustering
[3] Variance Gamma
[4] Normal Tempered Stable
[5] Classical Tempered Stable
[6] Stocastic Volatility Levy Process
[7] Cox - Ingersoll-Ross
[8] Conditional Value at Risk

در بازار برای داده‌های مالی اعم از چولگی و دم سنگینی را به خوبی بیان می‌کنند. برتری این مدل‌ها نسبت به مدل‌های پیشین انعطاف پذیری بیشتر و برازش بهتر به توزیع بازده داده‌ها است که منجر به تعیین معیارهای ریسک به صورت دقیق تر می‌شود. برای برآورد پارامترهای مدل از روش حداکثر درستنمایی[1] استفاده می‌شود که پارامترها را با هدف ماکزیمم‌سازی تابع درستنمایی برآورد می‌کند. با به‌کار بردن توابع مشخصه و روش تبدیل فوریه سریع[2] می‌توان فرم بسته‌ای از توابع چگالی احتمال بازده‌ها، VaR و CVaR را بر حسب پارامترهای برآورد شده توسط الگوریتم محاسبه نمود. از آنجا که این پژوهش می‌تواند در فرایند تصمیم‌گیری سرمایه‌گذاران مورد استفاده قرار گیرد و تنها متغیرها و اطلاعات جمع آوری شده توصیف می‌شود، پژوهش کاربردی و توصیفی محسوب می‌شود. هدف اصلی‌این پژوهش اجرای مدلی برای محاسبه ارزش در معرض خطر شرطی با استفاده از فرایندهای لوی تلاطم تصادفی برای شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران است. دراین راستا برآورد پارامترهای مدل با تکنیک‌های جدید و با دقت بالا صورت گرفته است. هدف فرعی آن نیز مقایسه نتایج حاصل از معیارهای پس آزمایی[3]این فرایندها در مقایسه با روش شبیه‌ساز تاریخی و روش واریانس ـ کواریانس با فرض توزیع نرمال است. این پژوهش به صورت زیر طراحی و نگارش شده است. در بخش ۲ مبانی نظری و پیشینه پژوهش بیان شد. بخش ۳ روش پژوهش بیان شده است. در بخش ۴ برآورد پارامترهای مدل با استفاده از روش‌های بهینه‌سازی ترکیبی بیان شد. در بخش ۵ به بیان نتایج عددی و پیشنهادهای آتی پرداخته شده است.

۲. مبانی نظری و پیشینه پژوهش

در اواخر سال‌های ۱۹۷۰ و۱۹۸۰ شماری از شرکت‌های مالی بزرگ شروع به پیدا کردن روش‌ها و الگوهایی برای محاسبه ریسک‌های داخلی خود نمودند. در سال ۱۹۹۶ وترستون[4]مدیر شرکت جی.پی.مورگان[5]مدل ارزش در معرض خطر را معرفی کرد. از آنجا که توزیع داده‌های مالی دارای ویژگی‌های خاصی از جمله چولگی، کشیدگی و هم چنین تلاطم خوشه‌ای هستند، مطالعات زیادی صورت گرفته است که به‌توانند الگوهایی را بیابند که با مشاهدات بازار متناسب باشد [۱۹،۱۷،۱۴]. کار و وو[6] (۲۰۰۴) نشان دادند که تلاطم تصادفی و پرش و اثر اهرمی[7] سه بخش ذاتی قیمت دارایی‌های مالی می‌باشد [۷]. اساساً سه روش برای مدل‌سازی تلاطم تصادفی وجود دارد روش اول استفاده کردن از مدل اتورگرسیو ناهمسانی شرطی تعمیم یافته (GARCH)[8]،

---

[1] Maximum Likelihood Estimation
[2] Fast Fourier Transform
[3] Back Testing
[4] Weterstone
[5] J.P.Morgan
[6] Carr and Wu
[7] Leverage Effect
[8] Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity

روش دوم استفاده از مدل‌های تلاطم تصادفی همانند مدل هستون و روش سوم استفاده از فرایندهای لوی زمان متغیر است. در ابتدا به مبانی نظری پرداخته و سپس پیشینه پژوهش مطرح می گردد.

چهارچوب نظری

• توزیع پایدار ملایم شده کلاسیک

متغیر تصادفی X دارای توزیع پایدار ملایم شده کلاسیک است هر گاه دارای تابع مشخصه زیر باشد.

رابطه(۱)

$$\begin{aligned}\phi_{CTS}(\mathrm{u}) &= \phi_{CTS}(u;\alpha,C_2,\lambda_+,\lambda_-,m)\\ &= \exp\Big(ium - iu\mathrm{C}_2\Gamma(1-\alpha)(\lambda_+^{\alpha-1}-\lambda_-^{\alpha-1})\\ &\quad + c\Gamma(-\alpha)((\lambda_+ - iu)^{\alpha} - \lambda_+^{\alpha} + (\lambda_- + iu)^{\alpha} - \lambda_-^{\alpha})\Big)\end{aligned}$$

که در آن $\alpha \in \big((0,1) \cup (1,2)\big)$ ، $c,\lambda_+,\lambda_- > 0$ و $m \in \mathbb{R}$. متغیر تصادفی X را که دارای توزیع پایدار ملایم شده کلاسیک است به صورت $X\sim \mathrm{CTS}(\alpha,\ C_2,\lambda_+,\lambda_-,\mathrm{m})$ نمایش می‌دهند. پارامتر m موقعیت توزیع را تعیین می‌کند و پارامتر c پارامتر مقیاس است. همچنین پارامترهای λ_+,λ_- میزان تمایل دم‌ها به نقاط انتهایی را نشان می‌دهند. اگر $(\lambda_+ > \lambda_-)$ و $(\lambda_+ < \lambda_-)$ آن گاه توزیع به سمت چپ (راست) چوله است و اگر $\lambda_+ = \lambda_-$ توزیع متقارن است. همچنین به ازای $\alpha = 0$، توزیع پایدار ملایم شده کلاسیک به توزیع واریانس گاما همگرا می‌شود [۳۷،۲۴].

• توزیع پایدار ملایم شده نرمال

متغیر تصادفی X دارای توزیع پایدار ملایم شده کلاسیک است هر گاه دارای تابع مشخصه زیر باشد.

رابطه(۲)

$$\begin{aligned}\Phi_X &= \phi_X(u;\alpha,c,\lambda,\beta,m)\\ &= \exp(ium - iu2^{-\frac{\alpha-1}{2}}\sqrt{\pi}c\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\beta(\lambda^2-\beta^2)^{\frac{\alpha}{2}-1}\\ &\quad + 2^{-\frac{\alpha+1}{2}}c\sqrt{\pi}\Gamma(-\frac{\alpha}{2})\left((\lambda^2-(\beta+iu)^2)^{\frac{\alpha}{2}} - (\lambda^2-\beta^2)^{\frac{\alpha}{2}}\right)\Big)\end{aligned}$$

که در آن $\alpha \in (0,2)$ و $c\lambda > 0$ ، $|\beta| < \lambda$ و $m \in \mathbb{R}$. متغیر تصادفی X را که دارای توزیع پایدار ملایم شده نرمال است به صورت $X \sim NTS(\alpha,c,\lambda,\beta,m)$ نمایش می‌دهند. نقش پارامترهای c,λ,m و α همان نقش در توزیع پایدار ملایم شده کلاسیک را دارند و پارامتر β به چولگی توزیع مربوط است. اگر $\beta < 0$ $(\beta > 0)$ توزیع چوله به چپ (راست) است و اگر $\beta = 0$ توزیع متقارن است [۳۷،۲۴].

• فرایند واریانس گاما

فرایند واریانس گاما با زمان متغیر کردن یک فرایند حرکت براوانی با رانش حاصل می‌شود. بنابراین دارای توزیع نرمال است به طوریکه واریانس آن یک فرایند گاما می‌باشد و به صورت زیرتعریف می شود.

$$X_{G_t} = \mu G_t + \sigma W_{G_t}$$

که در آن $\{G_t , t \geq 0\}$یک فرایند گاما و $\{W_t , t \geq 0\}$ یک حرکت براوانی است واین دو فرایند از یکدیگر مستقل هستند[۳۷،۲۴].

• فرایند پایدار ملایم شده نرمال

این فرایند هم همانند واریانس گاما یک فرایند زمان متغیر است که عامل زمان متغیر در آن یک فرایند پایدار ملایم شده به صورت زیر است.

$$X_{T_t} = \mu T_t + \sigma W_{T_t}$$

$\{T_t , t \geq 0\}$ فرایند زمان و از فرایند حرکت براوانیW_t مستقل است و تابع مشخصه آن به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\varphi = \exp(t \int_0^{\infty} (e^{iux} - 1) v(dx))$$

که در آن v بیانگراندازه لوی فرایند پایدار ملایم شده نرمال است[۳۷،۲۴].

• فرایند کاکس ـاینگرسول ـ راس

فرایند همبسته کاکس ـاینگرسول ـ راس(CIR) که برای زمان متغیر کردن فرایندهای لوی نیز به‌کار می رود، موجب نوسانات تصادفی و ویژگی بازگشت به میانگین آن موجب تلاطم خوشه‌ای می‌شود. فرایند $\{Y_t ,t \geq 0\}$ را که می‌توان به صورت جواب معادله دیفرانسیل تصادفی زیر بیان کرد

$$Y_t = Y_0 + k \int_0^t (\eta - Y_s) ds + \lambda \int_0^t \sqrt{Y_s}\, ds$$

فرایند CIR گویندکه در آن پارامترهای λ، η و k ثابت‌های مثبتی هستند که η میانگین بلند مدت فرایند ،k نرخ بازگشت به میانگین و λ تلاطم مدل است [۳۵].

• تابع مشخصه فرایند لوی تلاطم تصادفی

دراین زیر بخش به بیان تلاطم تصادفی نمودن قیمت دارایی‌های مالی و بازده دارایی‌های مالی با استفاده از فرایند کاکس ـاینگرسول ـ راس می پردازیم. فرض می‌کنیم مدل کلی دینامیک قیمت دارایی به صورت

$$dS_t = S_t d_{X_{Y_t}} \quad ،$$

$$dY_t = k(\eta - Y_t)dt + \lambda \sqrt{Y_t} dW_t \quad .$$

$$Y_t = \int_0^t y_u \, du$$

باشد که در آن $\boldsymbol{Y_t}$ انتگرال فرایند کاکس ـاینگرسول ـ راس می‌باشد.

فرض کنید $\boldsymbol{X} = \{\boldsymbol{X_t}, \boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0}\}$ فرایند لوی و $\{\boldsymbol{Y_t}, \boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0}\}$ فرایند زمان تبعی شده آن باشد که دراین مقاله فرایند کاکس ـاینگرسول ـ راس است. دراین صورت تابع مشخصه فرایند لوی تلاطم تصادفی درحالت کلی به صورت زیر به دست می‌آید.

رابطه(۳)
$$\mathbb{E}\left(\boldsymbol{exp}\left(\boldsymbol{iuX}(\boldsymbol{Y_t})\right)\right) = \boldsymbol{\phi}(-\boldsymbol{i}\boldsymbol{\psi_X}(\boldsymbol{u}))$$

که در آن ϕ تابع مشخصه فرایند تبعی شده که ما دراین مقاله انتگرال فرایند CIR در نظر می گیریم و $\psi_X(u)$ نمای مشخصه فرایند لوی X می‌باشد[۳۷،۲۴،۷]. $\psi_X(u)$ درای‌ن مقاله تابع مشخصه‌های فرایندهای واریانس گاما، کلاسیک پایدار ملایم شده و نرمال پایدار ملایم شده هستند.

پیشینه پژوهش

برنز[۱] (۲۰۰۲) با استفاده از مدل‌های GARCH مقادیر ارزش در معرض ریسک را برآورد نمود [۶]. نتایج پژوهش برنز (۲۰۰۲) نشان داد که برآورد کننده‌های GARCH درمقایسه با سایر مدل‌ها به جهت دقت و همچنین سازگاری برآوردگر عملکرد بهتری دارند. روی[۲] (۲۰۰۲) نشان داد، در شرایطی که توزیع بازده دارایی دارای دم‌های پهن هستند، استفاده از روش پارامتریک مبتنی بر فرض نرمال بودن توزیع بازده تخمین نادرستی از VaR ارائه می‌دهد [۳۱]. حال آنکه استفاده از مدل‌های مرتبه بالاتر GARCH نتایج کارآمدتری را پس از حذف همبستگی سریالی در داده‌ها بدست می آورد. کارا و وو (۲۰۰۲) فرایندهای لوی زمان متغیر را معرفی کرده و نشان دادند که ساختار منعطفی را دارا می‌باشند. با به‌کار بردن‌این فرایندها در مدل‌سازی می‌توان پرش ، تلاطم‌های تصادفی و تلاطم‌های خوشه‌ای داده‌های مالی را مدل‌سازی کرد [۷]. از جمله مدل‌های منعطف برای عامل زمان تبعی شده [۳] در فرایندهای لوی زمان متغیر می‌توان به توزیع‌های آلفا پایدار پارتو [۴] اشاره کرد که با در نظر گرفتن کشیدگی و پهن بودن دم توزیع برای مدل‌سازی مالی مناسب هستند. اما چون دراین توزیع‌ها گشتاورهای مرتبه بالاتر وجود ندارد نمی‌توان از آن‌ها برای مدل‌سازی مالی استفاده کرد. زاوسکی و همکاران[۵] (۲۰۱۴) نشان دادند که گزینه مناسب برای زمان تصادفی استفاده از فرایندهای پایدار ملایم شده با پرش‌های نامتناهی[۶] [۳۸]. است.

---

[۱] Burns

[۲] Roy

[3] Subordinated

[4] α - Stable Paretian Distributions

[۵] Zaevski

[6] Infinte Activity Tempered Stable

مدل‌های پایدار ملایم شده با پرش‌های نامتناهی چون ترکیبی از نوسانات تصادفی هستند، می‌توانند به نحو کاراتری الگوهای پرش‌های بزرگ و کوچک را مدل‌سازی کنند. کار و وو نشان دادند که‌این مدل‌های ترکیبی دارای کشیدگی بیشتر، چولگی بیشتر و نیز نوسانات خوشه‌ای هستند[۷]. شوتنس و همکاران[۱](۲۰۰۳) از فرایندهای خود همبسته CIR برای مدل‌سازی نوسانات تصادفی استفاده کردند [۳۴]. کیم و همکاران[۲] (۲۰۰۹) به تخمین پارامترهای‌این توزیع‌ها و همچنین توزیع نرمال پرداختند و سپس میانگین VaR را برای هرکدام محاسبه کردند [۱۷]. کیم و همکاران (۲۰۰۹) از روش‌های کولموگروف ـ اسمیرنف[۳] و اندرسون دارلینگ[۴] برای نیکویی برازش تابع توزیع احتمال استفاده شده است. طبق نتایج حاصل از کولموگروف ـ اسمیرنف پارامترهای حاصل از توزیع نرمال رد شدند، ولی سایر مدل‌ها تأیید شدند. همچنین روش اندرسون دارلینگ نشان داد که توزیع نرمال نمی‌تواند با دم توزیع داده‌های تجربی تطابق داشته باشد. ژانگ و گونگ[۵] (۲۰۱۷) با استفاده از مدل‌های تلاطم تصادفی پایدار ملایم شده به بررسی CVaR داده‌های شاخص بورس چین (هنگ سنگ[۶]) پرداختند و نتیجه گرفتند که مدل تلاطم تصادفی پایدار نرمال قابلیت بهتری برای پیش بینی و اندازه گیری ریسک دارد [۱۲]. محمدی و همکاران (۱۳۸۷) در پژوهشی به محاسبه VaR با استفاده از مدل‌های ناهمسان واریانس شرطی در بورس اوراق بهادار تهران پرداختند. نتایج پس آزمون حاکی از برتری مدل تی استیودنت بود [۲۰]. سجادی و هدایت (۱۳۹۲) با استفاده از نظریه ارزش فرین به محاسبه VaR پرداختند و نشان دادند توزیع تعمیم یافته پارتو، تی استیودنت شرطی و توزیع تعمیم یافته پارتو شرطی توانایی بهتری در مدل‌سازی داده‌های بورس اوراق بهادار تهران دارند. اما نتوانستند مدلی را بیابند که در تمامی سطوح آماری معنا دار باشد [۳۲]. پس از آن راعی و همکاران (۱۳۹۴) با استفاده از مدل‌های GARCHو GARCH چند متغیره به برآورد ارزش در معرض ریسک سبد سرمایه‌گذاری شامل سکه و شاخص بورس اوراق بهادار تهران پرداختند. مطالعات آن‌ها نشان داد که مدل GARCH چند متغیره نسبت به GARCH برتری دارد [۲۶]. فلاح پور و همکاران (۱۳۹۶) در پژوهشی تحت عنوان ارزش در معرض خطر شرطی مبتنی بر نظریه مقدار کرانی در وجه تضمین قراردادهای آتی سکه به بررسی مقادیر وجه تضمین‌این نوع قراردادها پرداختند [۱۱]. درسال‌های اخیر شفیعی و همکاران (۱۳۹۸) ابتدا پارامترهای معادلات دیفرانسیل تصادفی را که شامل حرکت براوانی هندسی، حرکت براوانی با جمله جهش، مدل GARCH غیر خطی و مدل هستون را با استفاده

[۱] Schoutens

[۲] Kim

[3] Kolmogorov Smirnov

[4] Darling-Anderson

[۵] Gong and Zhuang

[6] Hangseng

از شبیه‌ساز مونت کارلو برآورد کرده و سپس با استفاده ازاین مدل‌ها VaR را به دست آوردند[۳۵]. خداپرستی و مصلحی (۱۳۹۸) به بررسی چهار استراتژی پوشش ریسک سبد سرمایه بر پایه توقف–زیان ، اختیار فروش ترکیبی سهم ثاب و ارزش در معرض خطر پویا پرداخته و نشان دادند مدل ارزش در معرض خطر پویا نسبت به سایر استراتژیها برای داده‌های روزانه شاخص کل قیمت بورس اوراق بهادار تهران عملکرد بهتری را نشان داده می‌دهد[۴] .

علی رغم تعدد پژوهش‌های داخلی و خارجی پیرامون مدل‌سازی ارزش در معرض خطر، مطالعات کمتری در زمینه مدل‌سازی هم زمان پرش‌ها و نیز خاصیت تلاطم تصادفی داده‌های مالی انجام شده است. به عنوان نمونه در مدل هستون تنها تلاطم‌های تصادفی داده‌های مالی مدل‌سازی می‌شوند اما پرش‌های بزرگ و کوچکی که در داده‌های مالی شاهد آن هستیم در نظر گرفته نمی‌شود. مدل بیتس که یک مدل بهبود یافته از مدل هستون است با استفاده از فرایند پواسون جمله پرش را به مدل هستون اضافه می‌کند اما فرایند پواسون تنها تعداد شمارا پرش را در هر واحد زمان منظور می‌کند که با مشاهدات بازار تطابق ندارد. در پژوهش‌های داخلی عمدتاً از مدل‌های GARCH برای‌ایجاد تلاطم‌های تصادفی استفاده شده است. مدل‌های گسسته‌ای همچون ARCH و GARCH تنها عامل نوسان را تصادفی در نظر می‌گیرند در حالی که مدل‌های زمان پیوسته تلاطم تصادفی به کار رفته دراین پژوهش هر دو عامل بازدهی و نیز نوسان را تصادفی در نظر می‌گیرند که برای مدل‌سازی داده‌های مالی مناسب تر است [۱۲]. برای مثال در پژوهش شفیعی و همکاران (۱۳۹۸) که با استفاده از مدل‌های GARCH غیر خطی و مدل هستون ارزش در معرض خطر را محاسبه نمودند، آزمون استقلال کریستوفرسون برای‌این مدل‌ها معنا دار نبود، که حاکی از وجود خطاهای خوشه‌ای در مدل بود [۳۵]. به‌این معنا که‌این مدل‌ها نتوانسته اند تلاطم‌های خوشه‌ای و هم چنین تعداد ناشمارا پرش‌های بزرگ و کوچکی که در داده‌های مالی مشاهده می‌شود را به خوبی مدل‌سازی کنند. فرایندهای ترکیبی تلاطم تصادفی و لوی به دلیل انعطاف پذیری بالا توانایی بهتری در مدل‌سازی پرش‌ها و نیز خاصیت تلاطم خوشه‌ای دارند. توزیع بازده دراین پژوهش مدل تلاطم تصادفی واریانس گاما، پایدار ملایم شده نرمال و پایدار ملایم شده کلاسیک در نظر گرفته می‌شود که ویژگی‌های مشاهده شده در بازار برای داده‌های مالی اعم از چولگی و دم سنگینی را به خوبی بیان می‌کنند. برتری مدل بیان شده انعطاف پذیری بیشتر توزیع بازده داده‌ها نسبت به مدل‌های پیشین است.

۳. روش‌شناسی پژوهش

دراین پژوهش بعد از معرفی مدل‌های تلاطم تصادفی به مقایسه عملکرد آن‌ها با شبیه‌ساز تاریخی و واریانس ـ کواریانس با فرض نرمال پرداخته می‌شود. در ابتدا ضروری است که داده‌ها تحلیل شده و ویژگی توزیع بازده دارایی‌ها از جمله کشیدگی و چولگی بررسی شود. سپس با استفاده

از تابع مشخصه فرایندهای تلاطم تصادفی پایدار ملایم شده پارامترهای مدل برآورد می‌گردد. به منظور تخمین پارامترها برای مدل‌های تلاطم تصادفی با استفاده از روش حداکثر درستنمایی نیاز به تابع چگالی احتمال است امااین مدل‌ها فاقد فرم بسته‌ای از تابع چگالی احتمال هستند. برای این منظور با استفاده از روش تبدیل فوریه سریع تابع چگالی احتمال به صورت عددی حاصل می‌گردد. از آنجا که تعداد پارامترها در مدل‌های تلاطم تصادفی زیاد است نمی‌توان با استفاده از شیوه‌های معمول‌این پارامترها را تخمین زد. به همین منظور از الگوریتم بهینه سازی ترکیبی ازدحام ذرات پارامترهای مدل برآورد می‌گردد. دراین روش با استفاده از الگوریتم جستجوی شبکه‌ای[۱] و روش تک متغیره[۲] (GU) فضای جواب مشخص می‌گردد و بعد از آن با استفاده از الگوریتم هوش ازدحامی ذرات(PSO)[۳] جواب بهینه در فضای جواب مشخص می‌شود. برای بررسی برازش توزیع‌های آماری از آزمون‌های کولموگروف ـ اسمیرنف و اندرسون دارلینگ استفاده می‌شود. داده‌های مورد استفاده برای تخمین پارامترها در مدل‌های تلاطم تصادفی بازده روزانه شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران از ابتدای سال ۱۳۸۸ تا ابتدای سال ۱۳۹۸می‌باشد. به منظور ارزیابی دقت پیش $CVaR$ و VaRاین مدل‌ها از آزمون‌های پس آزمایی شامل نسبت درستنمایی برکویتز[٤] و کریستوفرسون[۵] استفاده کرده و تفاوت عملکرد مدل‌ها را درسطح اطمینان ۹۹درصد برای شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران را تحلیل و بررسی شد. برای‌این منظور طول پنجره تخمین[٦] را از ابتدای سال ۱۳۸۸ تا ۱۳۹۲/۱۰/۲۹ و اندازه طول پنجره آزمون[۷] را از ابتدای ۱۳۹۲/۱۰/۳۰ تا انتهای سال ۱۳۹۵ که بازار شاهد یک رکود مالی دراین دوره بود در نظر گرفته شد. از مهم‌ترین مشکلاتی که مدل‌های گذشته در برآورد ریسک با آن مواجه بودند عدم تطابق و به‌کارگیری ویژگی‌های داده‌های مالی از جمله تلاطم خوشه‌ای و الگوی پرش در مدل‌ها بود [۳۷،۲۴]. فرایندهای پایدار ملایم شده به کار رفته دراین پژوهش توانایی مناسبی در مدل‌سازی الگوی پرش داده‌های مالی دارند [۳۵]. و هنگامی که تغییرات زمانی آن‌ها با استفاده از فرایند کاکس ـاینگرسول ـ راس سنجیده می‌شوند بهتر از انواع مدل‌های GARCH و هستون تلاطم‌های خوشه‌ای را مدل‌سازی می‌کنند [۱۲]

• ارزش در معرض خطر و ارزش در معرض خطر شرطی مدل‌های تلاطم تصادفی

---

۱ Grid Search

۲ Univariate Method

3 Particle Swarm Optimization

۴ Berkowitz Likelihood Ratio

5 Christofferon Likelihood Ratio

6 Estimation Window

7 Testing Window

معیار VaR عبارت است از حداکثر زیان بالقوه در یک پرتفوی حاوی دارایی‌های مالی در یک دوره زمانی خاص و نیز در یک سطح اطمینان مشخصی می‌باشد. ارزش در معرض خطر در یک سطح اطمینان مشخص به شکل زیر محاسبه می‌شود

$$VaR_{\delta}(\mathrm{X}) = F_X^{-1}(\delta)$$

که δ نشان دهنده یک سطح اطمینان مشخص است. برای محاسبه ارزش در معرض خطر و ارزش در معرض خطر شرطی انتخاب صحیح تابع توزیعی که با داده‌های مالی مطابقت داشته باشد بسیار مهم است. کیم و همکاران (۲۰۰۹) برای محاسبه ارزش در معرض خطر با استفاده از مدل‌های پایدار ملایم شده، تابع توزیع تجمعی $F_X = P(X < x)$ را برای متغیر تصادفی X متعلق به خانواده پایدار ملایم شده به شکل زیر نمایش دادند[۱۷] .

$$F_X(\mathrm{x}) = \frac{e^{\rho x}}{\pi} \Re \left\{ \int_0^{\infty} e^{-iux} \frac{\varphi_x(u+i\rho)}{\rho - iu} du \right\}$$ رابطه(۴)

که در آن $\rho > 0$ ، $\Re$ نشان دهنده بخش حقیقی مقدار اعداد مختلط و φ تابع مشخصه فرایند تلاطم تصادفی است. یکی از معایب VaR علاوه بر روش محاسبه آن ناتوانی‌این معیار در مد نظر قرار دادن شکل دنباله توزیع است. به عبارت دیگراین معیار قادر به پاسخگویی به‌این سوال نیست که اگر زیان بیشتر از مقدار ارزش در معرض خطر شود مقدار مورد انتظار ما از زیان چقدر خواهد بود [۲۱] . برای رفع‌این مشکل از مقدار ارزش در معرض خطر شرطی استفاده می‌شود.این معیار بیان کننده زیان مورد انتظار، در صورت بیشتر شدن زیان از مقدار VaR است یعنی

$$CVaR = E(L \mid L > VaR_p)$$

به منظور محاسبه ارزش در معرض خطر شرطی به وسیله مدل‌های تلاطم تصادفی کیم و همکاران فرمول زیر را نمایش دادند [۱۷].

$$CVaR_{\delta} = VaR_{\delta}(X) - \frac{e^{VaR_{\delta}(X)p}}{\pi(1-\delta)} \Re \left(\int_0^{\infty} e^{-iuVaR_{\delta}(X)} \frac{\varphi_X(u+ip)}{(u+ip)^2} du \right)$$ رابطه(۵)

- **محاسبه ارزش در معرض خطر با استفاده ازروش تبدیل فوریه سریع**

به منظور محاسبه تابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی با استفاده از تابع مشخصه راچو و هکاران از تبدیل فوریه معکوس استفاده کردند [۲۵]. که‌این رابطه به صورت زیر است.

$$f_X(\mathrm{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iux} \phi_X(u) du$$ رابطه(۶)

که در آن ϕ_X تابع مشـــخصـــه فرایندهای تلاطم تصـــادفی ذکر شـــده دراین پژوهش اســـت. با جایگذاری فرایندهای تلاطم تصـــادفی زمان متغیر در رابطه (۶) می‌توان تابع چگالی احتمال را برای‌این فرایندها محاســـبه نمود. انتگرال فوق فاقد یک جواب بســـته برای فرایندهای تلاطم تصـــادفی زمان متغیر اســـت اما می‌توان با اســـتفاده از روش‌های عددی‌این انتگرال را به آســـانی محا سبه نمود. به منظور محا سبه تابع چگالی احتمال برای تعداد زیادی داده روش FFT ا ستفاده می‌شـــود که نســـبت به ســـایر روش‌های عددی برای محاســـبه انتگرال کارآمد تر اســـت به ویژه هنگامی که قصد داریم از تابع حداکثر درستنمایی برای محاسبه پارامترها استفاده کنیم. به منظور محاسـبه ارزش در معرض خطر و ارزش در معرض خطر شـرطی همان گونه که بیان شـد کیم و همکاران نشـــان دادند که تابع توزیع تجمعی $F_X = P(X < x)$ مربوط به خانواده توزیع پایدار ملایم شده به شکل زیر محاسبه می‌شود

رابطه(۷)

$$F_X(\mathrm{x}) = \frac{e^{\rho x}}{\pi}\Re\left\{\int_0^\infty \left(e^{-iux}\frac{\varphi_x(u+i\rho)}{\rho - iu}\right)du\right\}$$

که در آن $\rho > 0$ ، $\Re$ نـ شان دهنده بخش حقیقی مقدار اعداد مختلط و φ تابع مـ شخـ صه فرایند تلاطم تصادفی است [۱۷]. ارزش در معرض خطر با یک سطح اطمینان مشخص بر حسب تابع توزیع به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$VaR_\delta(\mathrm{X}) = F_X^{-1}(\delta)$$

که δ نشان دهنده یک سطح اطمینان مشخص است. به منظور محاسبه تابع F_X با استفاده از روش FFT به صورت زیر عمل می‌کنیم.

از آنجا که انتگرال (۷) همگرا است می‌توان آن را به صورت زیر نوشت

$$F_X(\mathrm{x}) = \int_0^\infty e^{-iux} - \frac{\varphi_x(u+i\rho)}{\rho - iu}du \approx \sum_{k=1}^{N}\left(e^{-iu^*x}\frac{\varphi_X(u_k^*+i\rho)}{\rho - iu_k^*}\right)\frac{2a}{N}$$

$k = 1 \ldots N.$ رابطه(۸)

که در آن مقدار $u^* = \frac{u_k + u_{k+1}}{2}$ و $a = \frac{sN}{2}$. اگر در رابطه (۸) مقدار $u^*x = \frac{-\pi(2k-1)}{2} + \frac{(2k-1)}{2}\frac{2\pi}{N}(j-1)$ را جایگذاری نماییم آنگاه داریم

$$F_X(\mathrm{x}) = \frac{e^{\rho x}}{\pi}\Re\left(\frac{2\mathrm{a}}{\mathrm{N}}e^{-i\frac{\pi}{N}(j-1)}.FFT\left((-1)^{k-1}.i.\frac{\varphi_X(u_k^*+i\rho)}{\rho - iu_k^*}\right)\right)$$ رابطه(۹)

که در آن $j = 1 \ldots N$ است.

• الگوریتم بهینه‌سازی ترکیبی ازدحام ذرات

الگوریتم ترکیبی بهینه سازی ازدحام ذرات، حاصل ترکیب الگوریتم $\boldsymbol{PSO}$ با الگوریتم‌های جستجوی شبکه‌ای و روش تک متغیره است. الگوریتم ترکیبی بهینه سازی ازدحام ذرات ($\boldsymbol{GU\_PSO}$) یک روش بهینه یابی است که با کاهش فضای جستجو سعی در یافتن فضایی نزدیک به جواب بهینه و جستجو دراین فضا را دارد. الگوریتم $\boldsymbol{GU\_PSO}$ در دو فاز معرفی می‌شود [۱۶]. در گام اول با استفاده از روش جستجوی شبکه‌ای[۱] و روش تک متغیره[۲] فضای جواب تعریف می‌شود. در فاز دوم با استفاده از روش ازدحام ذرات در فضایی نزدیک به مقدار بهینه‌ای که توسط فاز اول پیدا شده جمعیت تصادفی از ذرات تشکیل می‌شود و مقدار بهینه سراسری را پیدا می‌کند.

• الگوریتم بهینه سازی ازدحام ذرات

الگوریتم بهینه سازی ازدحام ذرات (PSO) یک روش بهینه سازی تصادفی مبتنی بر جمعیت است که توسط کندی و ابرهارت[۳] (۱۹۹۵) طراحی شده است [۱۵]. الگوریتم PSO با گروهی از ذرات تصادفی آغاز می‌شود و در هر تکرار، هر ذره با دو ارزش بهترین بروز رسانی می‌شود. اولین مورد بهترین تجربه شخصی هر ذره (pbest) است و بهترین تجربه جمعیت به دست آمده، بهترین ارزش جهانی(gbest) است. پس از پیدا کردن بهترین مقادیر ذره سرعت و موقعیت هر ذره با استفاده از معادلات زیر بروز رسانی می‌شود.

$$v_{ij}(\mathrm{t}+1) = \omega(\mathrm{t}) + c_1 r_1\big(pbest_{ij}(t) - x_{ij}(t)\big) + c_2 r_2\big(gbest_{ij}(t) - x_{ij}(t)\big)$$

$$x_{ij}(t+1) = x_{ij}(t) + v_{ij}(\mathrm{t}+1).$$ رابطه(۱۰)

که در آن v سرعت ذرات، ω وزن‌اینرسی، c_1 و c_2 ضرایب یادگیری، r یک عدد تصادفی بین صفر و یک است که از توزیع یکنواخت تبعیت می‌کند و x_{ij} موقعیت فعلی ذرات است.

• الگوریتم جستجوی شبکه‌ای

روش جستجوی شبکه‌ای یکی از روش‌های پایه‌ای برای یافتن مقدار اولیه است. دراین روش شبکه‌ای از نقاط با فواصل یکسان را در فضای بهینه سازی‌ایجاد می‌کنند و برای تعیین مقدار اولیه مقدار تابع زیان را در هر یک ازاین نقاط محاسبه می‌کنند، کمترین مقدار تابع زیان می‌تواند به عنوان مقدار اولیه مورد استفاده قرار بگیرید.

---

۱ Grid search

۲ Univariate method

3 Kennedy and Eberhart

• روش تک متغیره

در روش تک متغیره با ثابت نگه داشتن $N-1$ متغیر و تغییر دادن یک متغیر دنباله‌ای از جواب‌های بهترایجاد می‌شود. از آنجا که $N-1$ متغیر ثابت هستند، مسائل چند متغیره به تک متغیره تبدیل می‌شوند.این روش از نقطه X_i آغاز می‌شود و هر چرخه با تغییر دادن تک تک متغیرها و ثابت نگه داشتن سایر متغیرها اتمام می یابد.این روش آنقدر تکرار می‌شود که جواب بهتری‌ایجاد نشود. الگوریتم GU_PSO در دو فاز معرفی می‌شود [۱۶]. گام‌های‌این الگوریتم به ترتیب به شرح زیر هستند.

• در گام اول تابع زیان و پارامترهای آن تعریف می‌شود.

• در گام دوم با استفاده از روش جستجوی شبکه‌ای فضای جستجو به خانه‌های مکعبی با اضلاع مساوی تقسیم می‌شود.

• در گام سوم در خانه‌های قطر اصلی به صورت تصادفی یک ذره‌ایجاد می‌شود.

• در گام چهارم ذراتی که به صورت تصادفی در هر خانه تشکیل شده‌اند در تابع زیان قرار می‌گیرند، کمترین مقدار باقی مانده و مابقی حذف می‌شوند.

• در گام پنجم جهت حرکت ذره با استفاده از روش تک متغیره مشخص می‌شود.

• در گام ششم روش تک متغیره را آنقدر تکرار کرده که مقدار تابع زیان در هیچ جهتی بهبود نیابد.

• در گام هفتم با استفاده از موقعیت ذره‌ای که در گام ششم مشخص شده بازه‌ای را نزدیک به‌این موقعیت مشخص کرده و با استفاده از الگوریتم ازدحام ذرات جمعیت تصادفی از ذرات راایجاد کرده و مقدار بهنیه مشخص می‌شود.

• دراین گام اگر یکی از متغیرها به انتهای بازه تعیین شده در مرحله هفتم رسیداین بازه گسترده تر می‌گردد.

• روش‌های پس آزمایی

ارزیابی نتایج عملکرد ارزش در معرض خطر با استفاده از فنون پس آزمون انجام می‌گیرد. پس آزمون طبق تعریف یک روش آماری است که هدف از آن بررسی نمودن‌این حقیقت است که‌ایا زیان‌ها ی واقعی با مقداری که توسط ارزش در معرض خطر پیش بینی شده است تناسب دارد یا خیر[۲۸،۹]. به طور کلی دو روش پوششی غیر شرطی[1] و سطح پوششی شرطی[2] برای انجام پس آزمایی وجود دارد.

• روش پس آزمایی کریستوفرسون

[1] Unconditional Coverage Level
[2] Conditional Coverage Level

روش‌های سطح پوششی شرطی توسط کریستوفرسون[۱] (۲۰۰۲) توسعه یافت. او نسبت پوشش شرطی (LR_{cc}) را به عنوان آزمونی برای سطح پوشش شرطی پیشنهاد کرد[۸].که به صورت زیر است:

$$LR_{cc} = LR_{uc} + LR_{ind}$$ رابطه(۱۱)

این آزمون که خود ترکیبی از پوششی شرطی و غیر شرطی است توانایی بهتری در آزمون نمودن ارزش در معرض خطر دارد. بخش غیر شرطی آن با استفاده از تابع توزیع برنولی مطابقت خطاها را می سنجد و بخش شرطی آن استقلال خطاها (LR_{ind}) را ارزیابی می‌کند. آزمون پوششی غیر شرطی (LR_{uc}) به دنبال بررسی نمودن تعداد خطاهای مشاهده شده با خطای تئوری است و فرض صفر، برابری خطاها است. برای آزمون نمودن‌این فرض، مقدار احتمال تحت فرض صفر که از توزیع برنولی تبعیت می‌کند به صورت زیر است

$$\mathrm{L}(\alpha) = \prod_{t=1}^{T}(1-\alpha)^{1-I_t}\alpha^{I_t}\,\alpha^{I_t} = (1-\alpha)^{T_0}\alpha^{T_1}$$ رابطه(۱۲)

که در آن T تعداد کل مشاهدات، α خطای تئوری، T_1 تعداد کل خطاها و T_0 تعداد کل موارد خطا نشده است. ارزش احتمال از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$L(\hat{\alpha}) = (1-\hat{\alpha})^{T_0}\hat{\alpha}^{T_1}$$ رابطه(۱۳)

که در آن $\hat{\alpha}$ نسبت تعداد خطاهای مشاهده شده(نسبت خطاها به کل مشاهدات) است. بنابراین برای آزمون پوششی غیرشرطی، آماره زیر را به‌کار می برند.

$$LR_{uc} = 2\ln\left(\frac{L(\hat{\alpha})}{\mathrm{L}(\alpha)}\right) \sim \chi^2(1)$$ رابطه(۱۴)

که در آن فرض صفر برابر بودن خطای تئوری و خطاهای مشاهده شده است. آزمون استقلال کریستوفرسون نسبت آزمون استقلال (LR_{ind}) را از طریق زنجیره ی مرتبه اول مارکوف بررسی می‌کند. بدین منظور احتمال رخ دادن دو خطای پی در پی p_{11}، احتمال رخ دادن خطا به شرطاینکه قبل از آن خطایی رخ نداده باشد p_{01} و به طور کلی $p_{ij} = \mathrm{pr}(\eta_t = \mathrm{i}|\eta_{t-1} = \mathrm{j})$ که در آن j . i مقادیری بین صفر و یک می‌گیرند را معرفی می‌کند. دراین آزمون تابع درستنمایی شرطی را با فرض صفر استقلال خطاهایی که از توزیع دو جمله‌ای پیروی می‌کنند به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{L}_R(\pi_1) = (1-P_{01})^{V_{00}}p_{01}^{V01}(1-p_{11})^{V_{10}}p_{11}^{V_{11}}$$ رابطه(۱۵)

---

[۱] Christoffersen

که در آن V_{ij} نشان دهنده تعداد مشاهدات j به دنبال i است. در آزمون استقلال کریستوفرسون فرض صفر برابر با خوشه‌ای نبودن خطاها است به‌این معنا که احتمال خطای فردا ارتباطی با مشاهدات امروز ندارد $p_{01} = p_{11} = p$ و ماتریس انتقالی‌این فرض برابر است با

رابطه(۱۶)
$$\widehat{\pi_0} = \begin{bmatrix} 1-\hat{p} & \hat{p} \\ 1-\hat{p} & \hat{p} \end{bmatrix}$$

که در آن $\hat{p} = \frac{V_{01}+V_{11}}{V_{00}+V_{10}+V_{01}+V_{11}}$. تابع درستنمایی پوششی غیر شرطی کریستوفرسون با استفاده از ماتریس انتقالی تخمین زده شده برابر است با

رابطه(۱۷)
$$\mathcal{L}_u(\widehat{\pi_0}) = (1-\hat{p})^{V_{00}+V_{10}}\hat{p}^{V_{01}+V_{11}}$$

بدین ترتیب آماره آزمون استقلال را می‌توان به صورت زیر تعریف نمود

رابطه(۱۸)
$$LR_{ind} = 2\left(\log\mathcal{L}_u(\widehat{\pi_0}) - \mathcal{L}_R(\pi_1)\right) \sim \chi^2(1)$$

که در آن $\chi^2(1)$ بیانگر توزیع خی دو با یک درجه آزادی است.

آزمون LR_{cc} شامل دو فرضیه پوششی غیر شرطی و استقلال می‌باشد که آماره آن به صورت زیر تعریف می‌گردد.

رابطه(۱۹)
$$LR_{cc} = 2\ln\left(\frac{\mathcal{L}_u(\widehat{\pi_1})}{\mathrm{L}(\alpha)}\right) \sim \chi^2(2)$$

فرض صفر در آزمون LR_{cc} استقلال خطا ها و برابر بودن خطای تئوری و مشاهده شده است.

- روش پس آزمایی برکویتز

در روش برکویتز[۱] (۲۰۰۱) بر خلاف روش‌های پوششی شرطی و غیرشرطی تعداد خطاهای برآورد شده اهمیت چندانی ندارد بلکه رویکرد جدیدی برای پس آزمایی ارائه می‌دهد [۵]. برکویتز به منظور پس آزمایی آزمون استقلال و آزمون دم توزیع را معرفی نمود. آزمون استقلال، بر اساس مدل اتورگرسیو مرتبه اول زیر می‌باشد

$$z_t - \mu = \rho(z_{t-1} - \mu) + e_t;$$

که در آن فرض صفر برابر است با استقلال خطاها به زبان ریاضی $var(\varepsilon) = 1$ و $\mu = 0$ و $\rho = 0$ تابع لگاریتم درستنمایی‌این آزمون به صورت زیر است

---
۱ Berkowitz

رابطه(۲۰)
$$L(\mu.\sigma.\rho) = -\frac{1}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\log\left[\frac{\sigma^2}{1-\rho}\right] - \left(\frac{\left(z_1-\frac{\mu}{1-p}\right)^2}{\frac{2\sigma^2}{(1-\rho^2)}}\right) - \frac{T-1}{2}\log(2\pi) - \frac{T-1}{2}\log(\sigma^2) - \sum_{t=2}^{T}\left[\frac{\left(z_t-\mu-\rho_{z_{t-1}}\right)^2}{2\sigma^2}\right]$$

که در آن σ^2 نشان دهنده واریانس نوفه سفید مدل است. به منظور آزمون استقلال برکویتز باید پارامتر تابع درستنمایی $L(\mu.\sigma^2.\rho)$ را با استفاده از روش حداکثر درستنمایی تخمین بزنیم و سپس مقدار آن را با $L(\mu.\sigma^2.0)$ مقایسه کنیم. تحت فرض صفراین دو مقدار باید برابر باشد بنابراین آماره‌این آزمون به صورت زیر محاسبه می‌شود.

رابطه(۲۱)
$$LR_{ind} = -2\mathrm{Ln}\left(L(\hat{\mu}.\hat{\sigma}.\hat{\rho}) - (\hat{\mu}.\hat{\sigma}.0)\right) \sim \chi^2(1)$$

که درآن $\hat{\mu}.\hat{\sigma}.\hat{\rho}$ پارامترهای تخمین زده شده است. آزمون دم توزیع برکویتز به مقایسه دم توزیع فرایند Z_t با توزیع نرمال استاندارد می پردازد و اگر مدل به خوبی با داده‌های مالی مطابق باشد تحت فرض صفر باید دم‌های توزیع با یکدیگر برابر باشند. از آنجا که دراین آزمون، فرض صفر بر اساس دم‌های توزیع است برای پس آزمایی ارزش در معرض خطر شرطی به خوبی عمل می‌کند. به‌این منظور در ابتدا فرایند $Z_t = \phi^{-1}(X_t)$ را محاسبه کرده سپس دم توزیع را به سطح اطمینان α محدود می‌کنیم. دراین راستا ارزش در معرض خطر را با استفاده از نرمال استاندارد معکوس در سطح اطمینان α محاسبه می‌کنیم $VaR_\alpha = \phi^{-1}(\alpha)$. متغیر جدید Z_t^* را به صورت زیر تعریف می نماییم.

رابطه(۲۲)
$$Z_t^* = \begin{cases} VaR_\alpha & if\ Z_t \geq VaR_\alpha \\ Z_t & if\ Z_t < VaR_\alpha \end{cases}$$

با استفاده از متغیر جدید Z_t^* اگر توزیع مدل برازش داده شده نرمال استاندارد باشد، فرض صفر دراین آزمون به صورت $\mu = 0$ ، $\sigma = 1$ بیان می‌شود. تابع درستنمایی‌این آزمون به صورت زیر است

رابطه(۲۳)
$$L(\mu.\sigma|Z^*) = -2\sum_{Z_t^*<VaR_\alpha} ln\frac{1}{\sigma}\phi\left(\frac{Z_t^*-\mu}{\sigma}\right) + \sum_{Z_t^*=VaR_\alpha} ln\left[1-\phi\left(\frac{VaR_\alpha-\mu}{\sigma}\right)\right]$$

که پارامترهای $\mu.\sigma$ با استفاده از روش حداکثر درستنمایی محاسبه می‌شود. آماره LR_{tail} به صورت زیر تعریف می‌شود.

رابطه(۲۴)
$$LR_{tail} = -2\mathrm{Ln}\left(L(1.0) - (\hat{\mu}.\hat{\sigma})\right) \sim \chi^2(2)$$

در صورتی که فرض صفر رد شود مدل به خوبی نتوانسته با داده‌های مالی برازش شود.

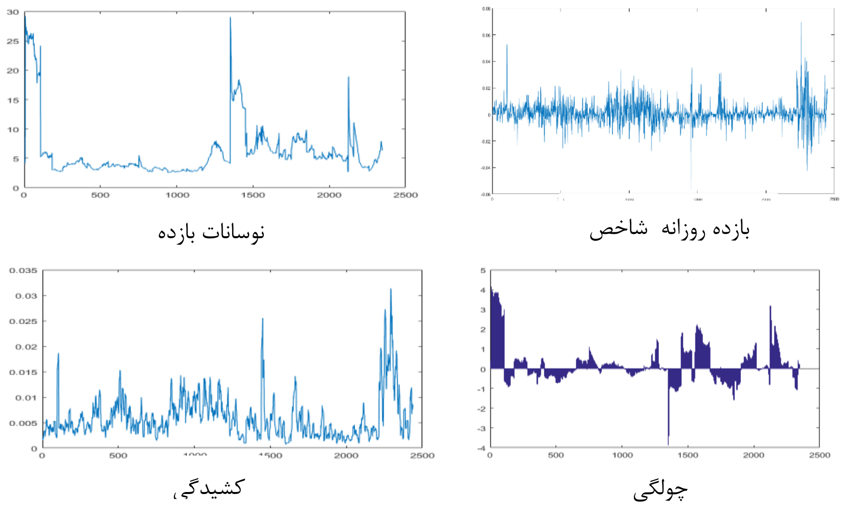
٤. تحلیل داده‌ها و یافته‌ها

برای تجزیه و تحلیل داده‌های واقعی و برازش مدلی مناسب، ۲۴۴۸ نمونه مشاهده روزانه بازده شاخص کل در دوره زمانی ابتدای سال ۱۳۸۸ تا ابتدای سال ۱۳۹۸ در نظر گرفته شد. ویژگی‌های آماری داده‌ها در جدول(۱) بیان شده است و همان طور که مشخص است مقدار چولگی و کشیدگی شاخص تفاوت معنا داری با چولگی و کشیدگی توزیع نرمال دارد که گویای ویژگی‌های غیر نرمال بازده دارایی مالی است. سطح معنی داری ۰,۰۰۱ آزمون جارگ - برا نشان دهنده رد فرض نرمال بودن بازده روزانه شاخص کل می‌باشد. در نمودار یک مشخصه‌های بازده از جمله نوسانات، چولگی وکشدیگی داده مورد نظر ترسیم شده است.هاروی و همکاران (۱۹۹۹) بیان کردند که کشیدگی بیشتر داده‌های مالی گویای‌این واقعیت است که بازار، احتمال بیشتری را برای مقادیر فرین و کرانی در نظر می‌گیرد. همچنین چولگی مثبت در داده‌های بورس اوراق بهادار تهران نشان دهنده احتمال بیشتر برای افزایش بازدهی دراین دوره است [۱۴].

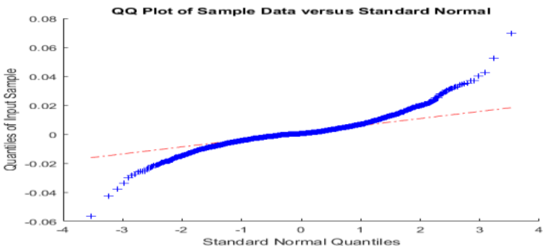
جدول(۱). آمار توصیفی

کشیدگی	میانگین	چولگی	آماره آزمون جارگ-برا
۱۰/۲۵۸۴	۰/۰۰۱۳	۰/۶۱۷۸	۰/۰۰۱

در نمودار(۱) ویژگی‌های آماری بازده روزانه شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران ترسیم شده است. بر اساس‌این نمودار چولگی و کشیدگی در نمونه مورد بررسی تفاوت معناداری با توزیع نرمال دارد. همچنین ویژگی تلاطم‌های خوشه‌ای دراین نمودار به خوبی مشهود است.



نمودار ۱. ویژگی آماری بازده‌های روزانه بورس اوراق بهادار تهران



نمودار۲ : نمودار چندک چندک بورس تهران

نمودار چندک چندک بورس تهران به خوبی ویژگی دم سنگینی بازده‌های روزانه شاخص کل را نشان می‌دهد.

- **تخمین پارامترهای مدل با الگوریتم GU_IPSO**

نتایج حاصل از تابع حداکثر درستنمایی سه مدل تلاطم تصادفی برای بورس اوراق بهادار تهران در جدول‌های (۲) الی(۴) مشخص شده است. همان طور که مشاهده می‌شود در مدل کلاسیک پایدار ملایم شده $(SVCTS)$، $\lambda_+ = $ ۱۸/۳۵۶۵ کوچکتر از $\lambda_- = $ ۲۶/۷۴۴۸ که بیانگر چوله به راست بودن توزیع می‌باشد.این ویژگی در مدل تلاطم تصادفی نرمال پایدار ملایم شده $(SVNTS)$ با مثبت بودن پارامتر $\mu = 0.0627$ و در مدل تلاطم تصادفی واریانس گاما $(SVVG)$ با نامساوی بودن $M = $ ۱۲/۴۸۲۱ و $G = $ ۲۱/۱۶۸۹ بیان شده است. الگوریتم PSO دارای یک کران اولیه است که با استفاده از گام اول الگوریتم ترکیبی ازدحام ذرات تعیین

می‌گردد. تعداد تکرار در گام اول الگوریتم حداکثر ۱۰۰۰ و تعداد ذرات تصادفی در الگوریتم PSO برابر ۵۰ و حداکثر تعداد تکرار ۲۰۰ در نظر گرفته شده است.

جدول۲. برآورد پارامترهای مدل $SVVG$ بورس تهران

C_1	G	M	K	η	λ
۱۲/۳۰۱	۲۱/۱۶۸۹	۱۲/۴۸۲۱	۸/۴۸۳۲	۰/۷۹۵۳	۰/۴۳۲۶

جدول۳. برآورد پارامترهای مدل $SVCTS$ بورس تهران

C_2	λ_-	λ_+	α	K	η	λ
۵/۵۳۴۸	۲۶/۷۴۴۸	۱۸/۳۵۶۵	۰/۶۴۳۱	۷/۲۱۶۵	۰/۵۱۴۷	۰/۷۴۱۳

جدول۴. برآورد پارامترهای مدل $SVNTS$ بورس تهران

μ	V	σ	θ	K	η	λ
۰/۰۶۲۷	۱۳/۹۹۵۸	۰/۰۰۲۱۵	۰/۵۴۷۳	۶/۹۸۴۱	۰/۳۳۶۵	۰/۸۲۶۵

پارامتر α در مدل $SVCTS$ کوچکتر از یک است که نشان دهنده کشیدگی بیشتر نسبت به توزیع نرمال است. پارامتر k نشان دهنده سرعت بازگشت به میانگین در تلاطم‌ها است و پارامتر η نشان دهنده میانگین بلند مدت تلاطم‌ها است. در مدل‌های تلاطم تصادفی پایدار ملایم شده ($SVTS$)این کمیت‌ها کمتر از مدل $SVVG$ است که نشان می‌دهد مدل‌های $SVTS$ برازش بهتری برای داده‌هایی که در یک بازه متناهی بی نهایت پرش دارند می‌دهند. جدول(۵) نشان دهنده آزمون‌های کولموگروف اسمیرنوف و اندرسون دارلینگ برای پارامترهای تخمین زده شده با استفاده از الگوریتم GU_PSO است. همان طور که مشاهده می‌شود مدل $SVNTS$ دارای کمترین مقدار آماره اندرسون دارلینگ است که نشان دهنده برازش بهتراین مدل با داده‌های بازار بورس اوراق بهادار تهران است.

جدول۵. نتایج حاصل از آزمون کولموگروف اسمیرنوف و اندرسون دارلینگ بورس تهران

model	KS	Pvalue	AD
SVVG	۰/۰۳۲۳	۰/۰۱۲۱	۰/۳۶۵۱
SVCTS	۰/۰۲۵۶	۰/۰۸۰۹	۰/۱۴۵۹
SVNTS	۰/۰۲۱۹	۰/۱۹۱۱	۰/۰۸۱۶

پس آزمایی ارزش در معرض خطر بورس اوراق بهادار تهران

برای پس آزمایی نمودن ارزش در معرض خطر باید داده‌ها را به دو پنجره آزمون و تخمین طبقه بندی کنیم. برای‌این منظور طول پنجره تخمین را از ابتدای سال ۱۳۸۸ تا ۱۳۹۲/۱۰/۲۹ و اندازه طول پنجره آزمون را از ابتدای ۱۳۹۲/۱۰/۳۰ تا انتهای سال ۱۳۹۵ که بازار شاهد یک رکود

مالی دراین دوره بود در نظر می گیریم. از روش کریســـتوفرســـون برای پس آزمایی ارزش در معرض خطر اســـتفاده می‌کنیم. جدول(۴) نتایج پس آزمایی ارزش در معرض خطر با اســـتفاده از روش شبیه‌ساز تاریخی، روش واریانس ـ کواریانس و مدل‌های تلاطم تصادفی را نشان می‌دهد.

جدول۴. نتایج پس آزمایی بورس تهران با استفاده از روش کریستوفرسون

model	LR_{UC}	Pvalue	LR_{ind}	pvalue	LR_{CC}	pvalue	violation
Historical	۰/۱۵۳۷	۰/۶۹۵۰	۴۴/۸۵۶۱	۰	۵۶/۹۸۲۰	۰	۹
Normal	۱/۱۱۱	۰/۲۹۱۹	۵۰/۱۹۴۵	۰	۵۹/۴۱۳۸	۰	۱۱
SVVG	۱/۲۲۱۷	۰/۲۶۹۰	۰/۰۶۸۲	۰/۷۹۴۰	۱۷/۳۴۶۷	۰	۵
SVCTS	۰/۴۹۳۷	۰/۴۸۲۳	۰/۸۹۶۳	۰/۷۷۹۶	۹/۲۶۴۱	۰/۰۰۹۷	۶
SVNTS	۰/۱۰۳۱	۰/۷۴۸۱	۰/۰۴۲۱	۰/۸۳۷۴	۳/۹۲۵۱	۰/۱۴۰۵	۷

بر اساس نتایج حاصل از جدول، بیشترین مقدار خطا متعلق به مدل واریانس ـ کواریانس است.این موضوع نشان می‌دهد که‌این مدل میزان زیان احتمالی را کم برآورد می‌کند حال آنکه مدل‌های $SVTS$ خطاهای کمتری دارند که نشان دهنده رویکرد محافظه کارانه تراین مدل‌ها می‌باشد. معنا دار بودن آزمون‌های استقلال برای تمامی مدل‌های $SVTS$ گویای‌این حقیقت است که‌این مدل‌ها تلاطم‌های خوشه‌ای را به خوبی مدل‌سازی کرده اند. با توجه به آزمون پوششی شرطی که تنها مدل $SVNTS$ را تایید می‌کند توانایی‌این مدل نسبت به چهار مدل دیگر برای برآورد ریسک دقیق تر است و سرمایه گذارن می‌توانند ازاین مدل استفاده نمایند.

پس آزمایی ارزش در معرض خطر شرطی بورس اوراق بهادار تهران

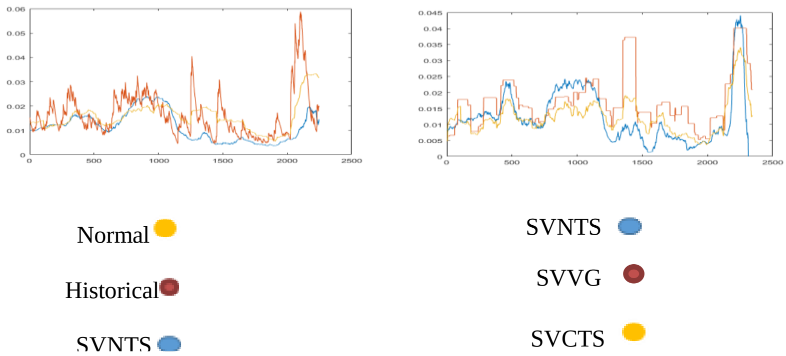
پس آزمایی نمودن ارزش درمعرض خطر شرطی نسبت به ارزش در معرض خطر کمی پیچیده تر است زیرا CVaR متوسط زیان را بررسی می‌کند. برای‌این منظور از آزمون برکویتز استفاده می‌کنیم. در جدول(۷) نتایج حاصل ازاین آزمون نمایش داده شده است.

جدول(۷). نتایج حاصل از پس آزمایی بورس تهران با استفاده از روش برکویتز

model	BLR_{ind}	Pvalue	BLR_{tai}	Pvalue
Normal	۱۲/۵۱۰	۰	۳۹/۳۸۵۹	۰
SVVG	۴/۰۰۱	۰/۰۴۵۵	۱۸/۲۸۷۳	۰
SVCTS	۳/۲۴۸۹	۰/۰۷۱۵	۱۲/۰۳۷۶	۰/۰۰۲۴
SVNTS	۲/۹۴۸۲	۰/۰۸۶۰	۸/۰۰۶	۰/۰۱۸۳

طبق نتایج جدول، آزمون BLR_{ind} برای مدل‌های تلاطم تصادفی معنا دار استاین نتیجه ناشی از آن است که‌این مدل‌ها به خوبی تلاطم‌های تصادفی را مدل‌سازی کرده اند. به دلیل ریزش زیاد شاخص کل در انتهای سال ۱۳۹۲ مدل واریانس ـ کواریانس قادر به پیش بینی دقیق $CVaR$ نیست. از آنجا که آزمون BLR_{tai} تنها برای مدل $SVNTS$ معنا دار است، نشان

می‌دهد. این مدل به خوبی با داده‌های بورس تهران مطابقت داشته و توانایی بهتری برای مدل‌سازی‌این داده‌ها را دارد. در نمودار(۳) روند ارزش در معرض خطرهای تخمین زده شده بورس اوراق بهادار تهران ترسیم شده است.



نمودار۳: روند ارزش در معرض خطرتخمین زده شده بورس اوراق بهاردار تهران

۵. بحث و نتیجه‌گیری

محا سبه ری سک همواره از مباحث مهم مالی بوده ا ست. معیارهای مختلفی برای اندازه گیری ریسـک توسـط صـاحبنظران معرفی شـده‌اند که هریک به جنبه‌ای از بحث عدم اطمینان اشـاره داشــته و بعضـاً مکمل یکدیگر نیز بوده اند. شـاخص‌های اندازه گیری ریسـک اولین بار از طریق مطالعات شــــاخص‌های پراکندگی آماری محاســــبه گردیدند و از آن به بعد روش‌های جدیدتری معرفی گردیدند که همگی از روش‌های آماری اســتفاده می‌کنند. از آنجا که داده‌های مالی دارای ویژگی‌هایی از جمله چولگی کشیدگی و هم چنین تلاطم خوشه‌ای هستند با استفاده از مدل‌های معمولی همچون واریانس ـ کواریانس و شبیه‌ساز تاریخی نمی‌توان ارزش در معرض خطر شرطی را برآورد نمود. تلاطم خو شه‌ای و پرش بخش جدایی ناپذیر داده‌های مالی ه ستند [۱۹] و نقش مهمی را در مدل‌سازی مالی‌ایفا می‌کنند. از آنجا که مدل‌های پیشین نمی تواستند الگوی پرش و تلاطم خوشـه‌ای را به درسـتی برآورد کنند سـرمایه‌گذاران قادر به برآورد دقیق ارزش در معرض خطر نبودند. فرایندهای لوی به دلیل انعطاف پذیری بیشـــتر الگوی پرش و تلاطم خوشـــه‌ای را نسبت به مدل‌های پیشین بهتر برآورد می‌کند [۷]. ازاینرو دراین پژوهش از سه فرایند لوی برای برآورد دقیق تر اندازه ریسک استفاده شده است. اثر تلاطم خوشه‌ای و پرش در بازده دارایی‌های مالی نقش مهمی راایفا می‌کنند و از آنجا که مدل‌های پیشـین نمی تواسـتنداین نوع الگوها را به درســتی برآورد کنند، ســرمایه‌گذاران قادر به برآورد دقیق ارزش در معرض خطر نبودند. ازاینرو دراین پژوهش از سه فرایند لوی به دلیل انعطاف پذیری بیشتر برای برآورد دقیق تر اندازه ریسک استفاده شده است. دراین مقاله مقدار VaR با استفاده از روش‌های مختلف (واریانس ـ کواریانس،

شبیه‌ساز تاریخی، مدل تلاطم تصادفی پایدار ملایم شده نرمال، تلاطم تصادفی پایدار ملایم شده کلا سیک و تلاطم ت صادفی واریانس گاما) برای شاخص کل بورس اوراق بهادار محا سبه شد. برای مقایسه دقت مدل‌های ارائه شده از آزمون‌های برکویتز و کریستوفرسون استفاده شده است. نتایج تحلیل داده‌های شاخص کل بورس تهران نشان دادند که مشخصه‌های چولگی و کشیدگی تفاوت معنا داری با توزیع نرمال دارد. کشیدگی بیشتر نشان دهند دم سنگینی در داده‌های مالی اســت بدین معنی که احتمال رخ دادن مقادیر فرین بیشــتر از توزیع نرمال اســت. همچنین نتایج پس آزمون حاکی از آن است که بیشترین مقدار خطا متعلق به مدل واریانس ـ کواریانس است.این مو ضوع ن شان می‌دهد که‌این مدل میزان زیان احتمالی را کم برآورد می‌کند. حال آنکه مدل‌های تلاطم ت صادفی خطاهای کمتری دارند که ن شان دهنده رویکرد محافظه کارانه تراین مدل‌ها در محاسبه VaR و CVaR می‌باشد. معنا دار بودن آزمون‌های استقلال برکویتز و کریستوفرسون برای تمامی مدل‌های تلاطم تصـــادفی گویای‌این حقیقت اســـت که‌این مدل‌ها تلاطم‌های خو شه‌ای را به خوبی مدل سازی کرده اند. حال آنکه مدل‌های واریانس ـ کواریانس و تاریخی به دلیل آنکه مدل‌های مناســبی برای مدل‌ســازی خطاهای خوشــه ارائه ن‌می‌دهند، براســاس‌این آزمون‌ها معنا دار نیســـتند و دقت کافی را برای تخمین ارزش در معرض خطر ندارند. با توجه به آزمونهای LR_{cc} و BLR_{tai} که تنها مدل SVNTS را تایید می‌کنند توانایی‌این مدل ن سبت به چهار مدل دیگر برای برآورد ریسک دقیق تر ا ست و سرمایه گذارن می‌توانند ازاین مدل ا ستفاده نمایند. نتایج حاصــل دراین پژوهش برای بورس اوراق بهادار تهران همانند مطالعات انجام شــده برای شـــاخص بورس چین بیانگر برتری مدل SVNTS اســـت [۱۲]. همچنین پس آزمایی‌این مدل حاکی از دقت بالاتراین مدل در پیش بینی VaR و CVaR اســـت. با توجه به نتایج، پیشــنهاد می‌شــود ســرمایه‌گذاران هنگام ارزیابی و انتخاب فرصــت‌های ســرمایه‌گذاری به مقادیر ارزش در معرض خطر بر اســاس مدل SVNTS توجه کرده و ســبدهای ســرمایه‌گذاری خود را براین ا ساس بهینه نمایند. علاوه براین با ا ستفاده از معیار شارپ تجدید نظر شده[۱] مبتنی براین مدل صندوق‌های سرمایه‌گذاری را به شکل دقیق تر ارزیابی نمایند.این مو ضوع برای مو س سات مالی همچون بیمه، بانک و صندوق‌های بازنشستگی دارای اهمیت گسترده تری است که بتوانند بر اســـاس معیار دقیق تری به اندازه گیری ریســـک دارایی‌های خود بپردازند و بر اســـاس آن استراتژی‌های مناسبی را اتخاذ کنند.

٦. پیشنهادها و محدودیت‌ها

در مدل مطرح شده دراین مقاله، فرایند لوی از فرایند کاکس ـ اینگرسول ـ راس مستقل در نظر گرفته شده است. به عنوان پیشنهاد برای پژوهش‌های آتی می‌توان مدل جدیدی را در نظر گرفت

---

[۱] Revised Sharpe Ratio

که‌این دو فرایند واب ستگی دا شته با شند و نتایج آن را برر سی کرد. همچنین می‌توان فرایندهای تلاطم تصـــادفی معرفی شـــده را به مدل‌های چند متغیره تعمیم داد. دراین پژوهش فرایندها با استفاده از انتگرال فرایند کاکس ـاینگرسول ـ راس تلاطم تصادفی شده‌اند حال آنکه می‌توان با استفاده از فرایند اورنشتین–اولنبک[1] فرایندها را تلاطم تصادفی نمود.

[1] Ornstein-Uhlenbeck

منابع

1. Aït-Sahalia, Y. Jacod, J. Li, J. (2012). Testing for jumps in noisy high frequency data. *Journal of Econometrics*, *168*(2), 207-222.

2. Allen, D. E., Powell, R. J. (2007). Thoughts on VaR and cVaR. *Journal of Financial. 1832.*

3. Barndorff-Nielsen, O. E. (1997). Processes of Normal inverse Gaussian type. *Finance and Stochastic, 2(1), 41-68.*

4. BashirKhodaparasti, R., & Moslehi, S. (2019). Comparison and Evaluation of Portfolio Insurance Strategies Using Bootstrap Block Simulation (Case Study: Tehran Stock Exchange). *Journal of Financial Management Perspective*, (25), 147-167. (in Persian)

5. Berkowitz, J. (2000), Testing the Accuracy of Density Forecasts, forthcoming, *Journal of Business and Economic Statistics*

6. Burns, P. (2002). The quality of Value at Risk via univariate GARCH. *Available at SSRN 443540*.

7. Carr, P., Wu, L. (2004). Time-changed Lévy processes and option pricing. *Journal of Financial economics*, *71*(1), 113-141.

8. Christoffersen, P., Pelletier, D. (2002). Backtesting portfolio risk measures. Working Paper, McGill University, Canada.

9. Dowd, K. (1998). Beyond value at risk: the new science of risk management. Wiley *Economics*, 1832-1850.

10. Engle, R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 987-1007.

11. Fallahshams, M., Saghsfi, A., Naserpoor, A. (2017). Futures Contracts Margin Setting by CVaR Approach Based on Extreme Value Theory. *Journal of Financial Engineering and Securities Management*, 8(32), 221-238. (in Persian)

12. Gong, X., Zhuang, X. (2017). Measuring financial risk and portfolio reversion with time changed tempered stable Lévy processes. *The North American Journal of Economics and Finance*, 40, 148-159.

13. Han, C. H., Liu, W. H., Chen, T. Y. (2014). VaR/CVaR estimation under stochastic volatility models. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, *17*(02), 1- 40.

14. Harvey, C. R., Siddique, A. (1999). Autoregressive conditional skewness. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, *34*(4), 465-487.

15. Kennedy, R. Eberhard, J. (1995). Particle swarm optimization. *International Conference on Neural Networks*, Vol. 4, 1942-1948.

16. Khajeh, A., Ghasemi, M. R., Ghohani Arab, H. (2017). Hybrid particle swarm optimization, grid search method and univariate method to optimally design steel frame structures. *Iran University of Science & Technology*, *7*(2),173-191

17. Kim, Y. S, Rachev, S., Bianchi, M. L., Fabozzi, F. J. (2009). Computing VaR and AVaR in infinitely divisible distributions. *Probability and Mathematical Statistics*, 30(2), 223-245.

18.Kim, Y. S., Rachev, S. T., Bianchi, M. L., Fabozzi, F. J. (2008). Financial market models with Lévy processes and time-varying volatility. *Journal of Banking & Finance*, *32*(7), 1363-1378.

19. Klingler, S., Kim, Y. S., Rachev, S.T., Fabozzi, F. J. (2013). Option pricing with time-changed Lévy processes. *Applied Financial Economics*, *23*(15), 1231-1238.

20. Mohammadi, S., Raei, R., Faizabad, A. (2008). Forecasting value-at-risk using conditional volatility models: Evidence from Tehran stock exchange. *Financial Research Journal*, *10*(25), 109-124. (in Persian)

21. Niesy, A., Peymany, M. (2018). Financial Modeling Using MATLAB. Allameh Tabataba'i University. (in Persian)

22. Nikoo, S. F., Shams, S., & Seyghali, M. (2020). Modeling of Optimal Stock portfolio Optimization Based on Risk Assessment and Behavioral Financial Approach (Mental Accounting (in Tehran Stock Exchange. *Journal of Financial Management Perspective*, (31), 75-101. (in Persian)

23. Pojarliev, M., Polasek, W. (2005). Volatility Forecasts and Value at Risk Evaluation for the MSCI North America Index. *Innovations in Classification, Data Science and Information Systems* (pp. 482-489). Springer, Berlin, Heidelberg.

24. Rachev, S. T., Kim، Y. S., Bianchi، M. L.,Fabozzi, F. J. (2011). Financial models with Lévy processes and volatility clustering (Vol. 187). John Wiley & Sons.

25. Rachev, S. T., Menn, C. (2006). Calibrated FFT-based density approximations for α-stable distributions. *Computational statistics & data analysis*, *50*(8), 1891-1904.

26. Raei, R., Saeedi, A. (2019).fundamentals of Financial Engineering and Risk Management. Tehran. Samt. (in Persian)

27. Raei, R., Haghverdi, S., Khajeh., Hajiesmaeili, M. (2016). Calculation of Value at Risk for portfolio of Coin and Bourse index; Comparing to models GARCH and m-GARCH. *Journal of Financial Engineering and securities Management, 6(25), 63-80* (in Persian)

28. Roccioletti, S. (2015). Backtesting Value at Risk and Expected Shortfal*l*. Springer.

29. Rosenblatt, M. (1952). Remarks on a multivariate transformation. *Annals of Mathematical Statistics*, 23, 470-472.

30. Rosinski, J. (2007). Tempering stable processes. *Stochastic Processes and Their Applications*, *117*(6)، 677-707.

31. Roy, S. (2002). Value at risk in the Indian government securities market: An empirical examination. In *International Conference on Business and Finance, At ICFAI University Hyderabad with Philadelphia University, USA*.

32. Sajjad, R., Hedayati, S. (2014). Estimation of value at risk by using extreme value theory. *Journal of Investment Knowledge*, 133-155. (in Persian)

33. Sato, K. I., Ken-Iti, S., Katok, A. (1999). Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions. Cambridge University Press.

34. Schoutens, W., & Symens, S. (2003). The pricing of exotic options by Monte–Carlo simulations in a Lévy market with stochastic volatility. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, *6*(08), 839-864.

35. Shafiee, A., and Tabrizi, H. (2019). Estimation of Value at Risk with Extreme Value Theory approach and using Stochastic Differential Equation. *Journal of Financial Engineering and securities Management*. 10(40), 325-348.

36. Shirvani, A., Rachev, S. T., Fabozzi, F. J. (2019). Multiple subordinated modeling of asset returns. *ArXiv preprint arXiv:1907.12600*.

37. Tankov, P. (2003). Financial Modelling with Jump Processes. Chapman and Hall/CRC.

38. Zaevski, T. S., Kim, Y. S., Fabozzi, F. J. (2014). Option pricing under stochastic volatility and tempered stable Lévy jumps. International Review of Financial Analysis, *31*, 101-108.