

## Analyzing the Information Contained in the Skewness and Kurtosis of TEPIX Returns for Forecasting Risk: GARCH Model with Gram-Charlier Expansions for Innovations

Elham Farzanegan \*

Research Paper

### Abstract

**Purpose:** A well-known stylized fact of asset return distributions is the pattern of skewness and kurtosis. Previous studies demonstrate that financial crises and turbulence induce shocks that significantly affect return distributions, resulting in both fat tails and asymmetric tail reactions. Despite the common influence of skewness and kurtosis on tail risk, their significance for risk forecasting has been underexplored in empirical financial research. Developing models for accurate risk forecasting remains a critical focus for policymakers, economists, financial market participants, and researchers. In this study, following Jimenez et al. (2022), a semi-nonparametric approach is adopted to estimate return densities based on the asymptotic properties of Gram-Charlier expansions. This approach allows for evaluating the significance of incorporating Hermite polynomials and their cross-products into Gram-Charlier densities for risk forecasting. Using this semi-nonparametric framework, risk measures can capture all stylized facts of the return series by incorporating new parameters, enabling a comprehensive assessment of skewness, kurtosis, and their interactions as valuable sources of information.

**Method:** For the first time, this study employs the modified Gram-Charlier (mGC) density function, which includes second and third moments (skewness and kurtosis) and their interactions, to model the risk distribution of daily

---

Received: 2023. November. 27 Accepted: 2024. August. 31.

\* Assistant Professor, Nahavand Higher Education Complex, Bu-Ali Sina University, Hamedan, Iran (Corresponding Author). Email: [e.farzanegan@basu.ac.ir](mailto:e.farzanegan@basu.ac.ir)

losses in the TEPIX index. The performance of alternative models based on different Gram-Charlier specifications is evaluated in terms of risk forecasting accuracy using advanced backtesting tests. Specifically, the Value-at-Risk (VaR) criteria and the Median Shortfall (MS) measure—introduced for the first time in this research—are utilized. The sample comprises daily TEPIX index series from May 20, 2008, to August 22, 2023. The loss series is computed as the negative logarithmic differences of prices, focusing on the right tail of the TEPIX distribution. Estimations are conducted using R and MATLAB software through a two-step process:

-The ARMA(1,1)-GARCH(1,1) model is estimated using the quasi-maximum likelihood (QML) approach, assuming Gaussian distribution for the error terms.

-The modified Gram-Charlier expansion and its alternative specifications are estimated using standardized residuals extracted from the first step, with maximum likelihood estimation applied for density fitting. The in-sample estimation window consists of 2,656 observations, and forecasts are updated with one new observation. The remaining 1,000 observations are used for out-of-sample forecasting.

**Findings:** The in-sample fitting of the ARMA(1,1)-GARCH(1,1) model, under the Gram-Charlier densities for innovations, indicates that skewness, kurtosis, and their interactions are statistically and economically significant. Backtesting results for 99%-VaR and 99%-MS demonstrate that the Gram-Charlier density specification incorporating the skewness parameter significantly improves out-of-sample risk forecasting, particularly for the tails, compared to alternative specifications.

**Conclusion:** Overall, the findings reveal that incorporating the asymmetry parameter of the return density as a stand-alone feature provides a valuable source of information, enabling accurate risk measures for market participants. These results have practical implications for designing risk management strategies and decision-making under market instability. The novelty of this study lies in applying a semi-nonparametric approach to evaluate risk forecasting for the TEPIX index. Unlike previous studies that relied primarily on parametric and non-parametric distributions, this research offers an innovative application for risk management in the Tehran Stock Exchange. The empirical findings also have potential implications for stabilizing financial markets.

**Keywords:** Gram-Charlier Expansions, Skewness and Kurtosis, Value-at-Risk, Median Shortfall, Backtesting

## بررسی محتوای اطلاعاتی چولگی و کشیدگی توزیع بازده TEPIX برای پیش‌بینی ریسک: مدل GARCH با بسط‌های گرام-چارلیر برای جملات اختلال

الهام فرزنانگان <sup>\*ci</sup>

چکیده

مقاله پژوهشی

**هدف:** یکی از حقایق شناخته شده در توزیع بازده دارایی‌ها، الگوی چولگی و کشیدگی است. در پژوهش‌های گذشته نشان داده شده است که بحران‌ها و تلاطم‌های مالی با شوک‌هایی همراه هستند که اثر بزرگی بر توزیع بازده دارند؛ به طوری که علاوه بر ایجاد دنباله‌های پهن، واکنش نامتقارن دنباله‌ها را نیز به همراه دارد. علی‌رغم اینکه هر دو مشخصه کشیدگی و چولگی بر ریسک دنباله، تأثیر مشترکی دارند، در مطالعات تجربی مالی توجه چندانی به اهمیت این دو ویژگی برای پیش‌بینی ریسک نشده است. توسعه مدل‌های مناسب برای پیش‌بینی دقیق ریسک موضوع مهمی است که همواره توجه سیاست‌گذاران، اقتصاددانان، مشارکت‌کنندگان در بازارهای مالی و پژوهشگران را به خود جلب نموده است. بدین منظور، در این پژوهش به پیروی از جیمز و همکاران (۲۰۲۲b) یک رویکرد نیمه-ناپارامتریک برای تخمین چگالی بازده اتخاذ می‌گردد که بر مبنای ویژگی‌های جانبی سری‌های گرام-چارلیر (GC) قرار دارد. این رویکرد امکان بررسی اهمیت در نظر گرفتن چندجمله‌ای‌های هرمیت و حاصل ضرب متقاطع آن‌ها در چگالی‌های گرام-چارلیر را برای پیش‌بینی ریسک فراهم می‌کند؛ ارزیابی معیارهای ریسک در یک ساختار نیمه‌ناپارامتریک امکان در نظر گرفتن همه حقایق کشف شده سری زمانی بازده را برای ارزیابی اثر چولگی و کشیدگی و تعامل بین آن‌ها از طریق اضافه کردن پارامترهای جدید به تابع چگالی به عنوان منبع اضافه اطلاعات، فراهم می‌کند.

تاریخ دریافت مقاله: ۱۴۰۲/۰۹/۰۶، تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۳/۰۶/۱۰

\* استادیار، گروه اقتصاد، دانشگاه بوعلی سینا- مجتمع آموزش عالی نهاوند (ویژه دختران)، همدان، ایران (نویسنده مسئول).

E-Mail: e.farzanegan@basu.ac.ir

**روش:** در این پژوهش، برای نخستین بار، تابع چگالی گرام-چارلیر تعمیم‌یافته (mGC) که شامل گشتاورهای دوم و سوم (چولگی و کشیدگی) و تعاملات بین آن‌ها می‌شود برای مدل‌سازی ریسک توزیع زیان روزانه شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران به کار برده می‌شود. به علاوه، عملکرد مدل‌های جایگزین مبتنی بر تصریح‌های مختلف گرام-چارلیر، از نظر دقت پیش‌بینی معیارهای ریسک، با استفاده از آزمون‌های نوین بک‌تست ارزیابی می‌شود. بدین منظور، در پژوهش معیار ارزش در معرض ریسک (VaR) و برای نخستین بار معیار ریزش میانه (MS) استفاده می‌شود. نمونه آماری شامل سری‌های روزانه شاخص کل قیمت بورس تهران (TEPIX) طی دوره ۱۳۸۷/۱/۱ لغایت ۱۴۰۲/۵/۳۱ می‌شود. با تمرکز بر دنباله راست توزیع TEPIX، سری زیان به صورت منفی تفاضل لگاریتمی قیمت محاسبه می‌شود. مدل‌ها نیز با استفاده از نرم‌افزارهای R و MATLAB تخمین زده می‌شوند. مدل‌سازی زیان‌های بازده شاخص TEPIX مطابق گام‌های زیر انجام می‌شود: گام ۱: مدل ARMA(1,1)-GARCH با فرض توزیع گاوسی برای جملات اختلال و با استفاده از رویکرد شبه-حداکثر راستنمایی (QML) تخمین زده شود. گام ۲: پارامترهای بسط گرام-چارلیر تعمیم‌یافته و سایر تصریح‌ها با استفاده از پسماندهای استاندارد شده که از گام قبل استخراج شده‌اند تخمین زده می‌شوند. برازش تصریح‌های مختلف چگالی گرام-چارلیر با استفاده از روش حداکثر راستنمایی انجام می‌شود. برای برازش درون‌نمونه‌ای مدل‌ها، پنجره تخمین با اندازه  $W_E=2656$  مشاهده، انتخاب می‌شود که گام رو به جلو به اندازه یک مشاهده جدید است. ۱۰۰۰ مشاهده باقی‌مانده برای پیش‌بینی‌های برون‌نمونه‌ای مورد استفاده قرار می‌گیرند.

**یافته‌ها:** نتایج برازش درون‌نمونه‌ای مدل ARMA(1,1)-GARCH با فرض چگالی گرام-چارلیر تعمیم‌یافته برای جمله اختلال، بر معنادار بودن آماری چولگی، کشیدگی و تعامل بین آن‌ها و از این رو بر محتوای اطلاعاتی معنادار آن‌ها از نظر اقتصادی و مالی، دلالت دارد. نتایج آزمون‌های بک‌تست معیارهای ارزش در معرض ریسک و ریزش میانه در سطح ۹۹ درصد، عملکرد برون‌نمونه‌ای تصریح چگالی گرام-چارلیر با پارامتر چولگی را برای پیش‌بینی قابل‌اتکای ریسک بالأخص ریسک دنباله‌های توزیع، در مقایسه با تصریح‌های جایگزین تأیید می‌کند.

**نتیجه‌گیری:** به‌طور کلی، نتایج نشان می‌دهند که در نظر گرفتن پارامتر مرتبط با عدم تقارن چگالی بازده به‌تنهایی می‌تواند منبع مرتبطی از اطلاعات باشد که معیارهای ریسک دقیقی را برای مشارکت‌کنندگان در بازار فراهم می‌کند. نتایج تجربی بدست آمده دستاوردهایی برای طراحی استراتژی‌های مدیریت ریسک و تصمیم‌گیری تحت شرایط بی‌ثباتی بازار دارد. نوآوری پژوهش حاضر در به‌کاربردن رویکرد نیمه-ناپارامتریک برای ارزیابی پیش‌بینی ریسک شاخص TEPIX است. پژوهش‌های قبلی، عمدتاً سری بازده را براساس توزیع‌های پارامتریک و ناپارامتریک مدل‌سازی کرده‌اند. براین اساس، یافته‌های تجربی پژوهش حاضر کاربرد نوآورانه برای مدیریت ریسک بورس اوراق بهادار تهران فراهم می‌کند؛ نتایج تجربی این پژوهش می‌تواند دستاوردهای مفیدی برای ثبات بخشیدن به بازار مالی داشته باشد.

**کلیدواژه‌ها:** بسط‌های گرام-چارلیر، چولگی و کشیدگی، ارزش در معرض ریسک، ریزش میانه، آزمون بک‌تست

## ۱. مقدمه

الگوی چولگی و کشیدگی در توزیع بازده دارایی‌ها یکی از شناخته‌شده‌ترین حقایق است که نخستین بار توسط ماندلبرت<sup>۱</sup> (۱۹۹۷) معرفی شد. در پژوهش‌های گذشته نشان داده شده است که بحران‌ها و تلاطم‌های مالی با شوک‌هایی همراه هستند که اثر بزرگی بر توزیع بازده دارند؛ به طوری که علاوه بر ایجاد دنباله‌های پهن، واکنش نامتقارن دنباله‌ها را نیز به همراه دارد. علی‌رغم اینکه هر دو مشخصه کشیدگی و چولگی بر ریسک دنباله، تأثیر مشترکی دارند (مالین و پروتی<sup>۲</sup>، ۲۰۰۰) در مطالعات تجربی مالی توجه چندانی به اهمیت این دو ویژگی برای پیش‌بینی ریسک نشده است.

طراحی مدل‌های مناسب برای پیش‌بینی دقیق ریسک موضوع مهمی است که همواره توجه سیاست‌گذاران، اقتصاددانان، مشارکت‌کنندگان در بازارهای مالی و پژوهشگران را به خود جلب نموده است. در این زمینه، مدل‌سازی و ارزیابی معیارهای ریسک دارایی‌های مالی با لحاظ فرض نرمال بودن توزیع بازده منجر به تصریح نادرست مدل می‌گردد؛ چراکه ضعف اساسی قانون گاوس در این است که فقط گشتاورهای اول و دوم توزیع بازده دارایی را در برمی‌گیرد و نمی‌تواند گشتاورهای مرتبه بالاتر را به طور کامل در خود جای دهد که ضرورت جایگزینی توزیع‌های دیگر را در معیارهای ریسک می‌رساند. بدین منظور، در این پژوهش به پیروی از جیمنز و همکاران<sup>۳</sup> (۲۰۲۲b) یک رویکرد نیمه-ناپارامتریک<sup>۴</sup> برای تخمین چگالی بازده اتخاذ می‌گردد که بر مبنای ویژگی‌های مجانبی سری‌های گرام-چارلیر<sup>۵</sup> (GC) (جانندو و راکینگر<sup>۶</sup>، ۲۰۰۱) قرار دارد؛ با استفاده از این بسط می‌توان توابع فرکانس را در قالب یک ساختار پارامتریک منعطف که قابلیت در نظر گرفتن همه حقایق کشف‌شده سری زمانی بازده را دارد، تقریب زد. در واقع، براساس این متدولوژی می‌توان اثر گشتاورهای مختلف را از طریق اضافه کردن پارامترهای جدید به تابع چگالی در نظر گرفت و به مدل‌سازی بازده دارایی‌هایی که از نوسان‌پذیری بالا برخوردار هستند و مقادیر حدی دارند، پرداخت (جیمنز و همکاران، ۲۰۲۲b). عملکرد قابل توجه و برجسته این رویکرد توسط اقتصاددانان برای قیمت‌گذاری اوراق مشتقه و مدیریت ریسک، با نشان دادن اهمیت در نظر گرفتن کشیدگی، چولگی و سایر گشتاورهای مراتب بالاتر، اثبات شده است (جیمنز و همکاران، ۲۰۲۲a؛ مالین و پروتی، ۲۰۰۰).

پژوهش حاضر رویکرد فوق را برای شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران (TEPIX) به کار می‌گیرد. شاخص TEPIX یکی از مهم‌ترین معیارهای سنجش عملکرد و نوسانات قیمتی در بورس

<sup>1</sup> Mandelbrot

<sup>2</sup> Mauleón & Perote

<sup>3</sup> Jiménez et al.

<sup>4</sup> Semi-nonParametric Approach

<sup>5</sup> Gram-Charlier (GC) Series

<sup>6</sup> Jondeau & Rockinger

اوراق بهادار تهران است. همچنین، پیش‌بینی دقیق ریسک برای بورس اوراق بهادار تهران از اهمیت کاربردی برخوردار است زیرا در مطالعات تجربی نشان داده شده است که بورس اوراق بهادار تهران بدلیل وابستگی شدید به اخبار، شایعات و رفتارهای سفته‌بازی، از نوسان‌های بالایی برخوردار است (دادگر و همکاران، ۲۰۲۳). در این شرایط که رخدادهای حادی در دنباله‌های چگالی بازده وجود دارد، پیش‌بینی بدون در نظر گرفتن گشتاورها نامعتبر خواهد بود؛ از این رو، پیش‌بینی ریسک شاخص TEPIX نیازمند در نظر گرفتن چولگی و کشیدگی در مدل‌سازی چگالی است. پژوهش فوق به دنبال بررسی این مهم است که تا چه اندازه گشتاورهای چگالی بازده و تعامل بین آن‌ها می‌تواند در اندازه‌گیری و پیش‌بینی ریسک شاخص TEPIX نقش داشته باشد.

تا آنجا که بررسی‌ها نشان می‌دهد تاکنون ویژگی غیرنرمال بودن، از طریق در نظر گرفتن مشخصه‌های کشیدگی مازاد و چولگی غیرصفر توزیع سری‌های زمانی بازده شاخص TEPIX، در مدل‌سازی و پیش‌بینی ریسک موردتوجه قرار نگرفته است. مطالعات گذشته گشتاورهای مرتبه اول و دوم توزیع بازده را تنها در فرآیند تخمین ریسک در نظر گرفته‌اند. به علاوه، تأثیر وارد کردن جملات متقاطع چندجمله‌ای هرمیت<sup>۱</sup> (HP) در تقریب تابع چگالی بازده شاخص TEPIX برای برآورد ریسک حتی در هیچ مطالعه‌ای در خارج از کشور برای بازارهای سهام نوظهور آزمون نشده است. به دو دلیل در نظر گرفتن جملات متقاطع چندجمله‌ای‌های HP موردتوجه هست: (۱) از دیدگاه نظری، بسط بدست آمده از تابع چگالی با لحاظ حاصل ضرب‌های متقاطع<sup>۲</sup> از HPها، به علت خاصیت متعامد بودن<sup>۳</sup> این چندجمله‌ای‌ها، یک چگالی محسوب می‌شود. (۲) از آنجایی که پارامترهای مربوط به جملات متقاطع، تعامل بین گشتاورها را دربر می‌گیرند، می‌توانند نقش مهمی را در برازش‌های پویا داشته باشند (جیمنز و همکاران، ۲۰۲۲). براین اساس، نوآوری پژوهش حاضر از نظر متدولوژی در این است که برای نخستین بار تعمیمی از تابع چگالی گرام-چارلیر تحت عنوان «تابع چگالی گرام-چارلیر تعمیم‌یافته<sup>۴</sup> mGC» در نظر گرفته می‌شود که براساس آن می‌توان معناداری و اهمیت گشتاورهای زوج و فرد (به‌ویژه کشیدگی و چولگی) و نیز تعامل‌های بین آن‌ها را برای پیش‌بینی ریسک سری زمانی شاخص TEPIX تجزیه و تحلیل نمود؛ به علاوه عملکرد مدل‌های جایگزین مبتنی بر تصریح‌های مختلف GC، از نظر دقت پیش‌بینی معیارهای ریسک، با استفاده از آزمون‌های نوین بک‌تست<sup>۵</sup> ارزیابی می‌شود. بدین منظور، در پژوهش حاضر در کنار معیار ارزش در معرض ریسک (VaR)، برای نخستین بار از معیار ریزش میانه<sup>۶</sup> (MS) نیز

<sup>۱</sup> Hermite Polynomial (HP)

<sup>۲</sup> منظور از حاصلضرب متقاطع چندجمله‌ای‌های هرمیت HPS، حاصلضرب داخلی میان آن‌ها، است:  $H_i(x_t) \cdot H_j(x_t)$ .

<sup>۳</sup> منظور از متعامد بودن چندجمله‌ای‌های هرمیت، این است که ضرب داخلی بین آن‌ها صفر باشد:

$\int H_i(x_t) \cdot H_j(x_t) \phi(x_t) dx_t = 0, \forall i \neq j$  که  $\phi(x_t)$  توزیع نرمال استاندارد است.

<sup>۴</sup> Modified Gram Charlier (mGC)

<sup>۵</sup> Backtesting

<sup>۶</sup> Median Shortfall

استفاده می‌شود؛ معیار MS تاکنون در ادبیات ارزیابی ریسک به کار برده نشده است. نوآوری دیگر پژوهش حاضر در به کار بردن رویکرد نیمه-ناپارامتریک برای ارزیابی پیش‌بینی ریسک شاخص TEPIX است. پژوهش‌های قبلی، عمدتاً سری بازده را براساس توزیع‌های پارامتریک و ناپارامتریک مدل‌سازی کرده‌اند. براین اساس، یافته‌های تجربی پژوهش حاضر کاربرد نوآورانه برای مدیریت ریسک بورس اوراق بهادار تهران فراهم می‌کند؛ نتایج تجربی این پژوهش می‌تواند دستاوردهای مفیدی برای ثبات بخشیدن به بازار مالی داشته باشد.

ادامه مقاله به شرح زیر است. در بخش بعدی مبانی نظری و پیشینه تحقیق بیان می‌شود. سپس روش‌شناسی پژوهش معرفی می‌شود. در ادامه، کاربرد تجربی مدل برای نمونه آماری، نتایج برازش درون‌نمونه‌ای و نتایج ارزیابی عملکرد پیش‌بینی برون‌نمونه‌ای مدل‌ها بیان می‌گردد و در نهایت بحث و نتیجه‌گیری نتیجه‌گیری و پیشنهادها و محدودیت‌ها ارائه می‌شود.

## ۲. مبانی نظری و پیشینه پژوهش

ارزش در معرض ریسک (VaR) درزمینه ارزیابی ریسک‌های مالی به خاطر محاسبات نسبتاً ساده و مفهوم قابل درک، کاربرد گسترده‌ای دارد؛ معیار VaR حداکثر زیان احتمالی در ارزش یک دارایی مالی را طی یک دوره زمانی مشخص و با مقدار احتمال معین (سطح اطمینان معلوم) اندازه‌گیری می‌نماید؛ اما VaR به مفهوم آماری فقط یک کوانتیل شرطی از توزیع زیان (بازده) است و نمی‌تواند رخدادهای حدی را به‌طور قابل قبول دربر بگیرد و ازاین‌رو معیار ریسک جامعی محسوب نمی‌شود. این موضوع درزمینه متنوع‌سازی ریسک و تخصیص دارایی از اهمیت بالایی برخوردار است.

در سال ۲۰۱۶، کمیته نظارت بر بانکداری بازل<sup>۱</sup> (سومین توافق‌نامه بازل) پیشنهاد کرد که جهت تعیین میزان سرمایه موردنیاز برای پوشش ریسک بانک‌ها، به‌جای VaR از ریزش مورد انتظار<sup>۲</sup> (ES) استفاده شود زیرا ES در مقایسه با VaR، مفهومی بیشتر از کوانتیل دارد و ریسک دنباله را نیز دربر می‌گیرد. به‌هرحال ES نیز مورد انتقاد قرار گرفته است؛ زیرا از آنجاییکه طبق تعریف، ES زیان مورد انتظار را اندازه می‌گیرد نسبت به مقادیر دورافتاده<sup>۳</sup> از قوت آماری برخوردار نیست. اخیراً کو و همکاران<sup>۴</sup> (۲۰۱۳) معیار ریسک جدید ریزش میانه (MS) را پیشنهاد داده‌اند که به معنای مقدار میانه زیان است هنگامی که زیان بیشتر از مقدار VaR می‌شود؛ و نشان دادند که برخلاف ES، معیار MS ریسک دنباله را از طریق در نظر گرفتن هر دو اندازه زیان و احتمال وقوع زیان، دربر می‌گیرد؛ درواقع، اگرچه هر دو آماره میانگین و میانه، متوسط اندازه یک کمیت تصادفی را اندازه‌گیری می‌نمایند اما در شرایط وجود زیان‌های حدی و توزیع‌های چوله، میانه یک معیار گرایش

<sup>1</sup> Basel Committee on Banking Supervision

<sup>2</sup> Expected Shortfall

<sup>3</sup> Outliers

<sup>4</sup> Kou et al.

مرکزی قوی‌تری در مقایسه با میانگین است (کو و پنگ<sup>۱</sup>، ۲۰۱۴). به علاوه، MS نسبت به تصریح نادرست مدل از قوت توزیعی برخوردار است یعنی با این معیار چندان تغییری در اندازه‌گیری ریسک ایجاد نمی‌شود؛ MS به آسانی قابل اجرا است<sup>۲</sup> به این مفهوم که برای هر توزیع دلخواه از بازده و در یک سطح اطمینان مفروض، MS به سادگی برابر با VaR در یک سطح اطمینان بالاتر هست؛ به عبارت دیگر، MS در سطح ۹۹ درصد برابر VAR در سطح ۹۹/۵ درصد است (کو و پنگ، ۲۰۱۴).

به هر حال قابلیت اطمینان و اعتبار معیارهای ریسک دارایی‌های مالی تا حد زیادی متکی به داشتن تصریح مناسبی از بازده دارایی است. در واقع، داشتن یک پیش‌بینی مناسب از معیارهای ریسک نیازمند آن است که ویژگی غیر گاوسی زمان متغیر سری‌های زمانی در چارچوب مدل‌سازی در نظر گرفته شود (وانگ و همکاران<sup>۳</sup>، ۲۰۲۲). به طور کلی، در ادبیات مربوطه دو روش برای مدل‌سازی ویژگی غیر نرمال بودن بازده دارایی‌ها پیشنهاد شده است. نخست، روش‌های مبتنی بر توزیع که به دنبال انتخاب توزیع پارامتریک مناسب می‌باشند به گونه‌ای که بتوانند چولگی غیر صفر و کشیدگی مازاد را نیز دربر بگیرند. در ادبیات، توزیع t-استیودنت چوله (هانسن<sup>۴</sup>، ۱۹۹۴)، توزیع t-استیودنت تعمیم‌یافته نسبت به چولگی (تئودوسیو<sup>۵</sup>، ۱۹۹۸) و توزیع t-استیودنت نامتقارن تعمیم‌یافته (ژو و گالبریث<sup>۶</sup>، ۲۰۱۰) معرفی شده است. توزیع‌های دیگر از قبیل توزیع پارتو تعمیم‌یافته، توزیع Z، توزیع لاپلاس نامتقارن و توزیع SU یوهانسن نیز پیشنهاد شده است (گرلاخ و همکاران<sup>۷</sup>، ۲۰۱۳؛ دندرامیس و همکاران<sup>۸</sup>، ۲۰۱۴؛ لان و پنتی<sup>۹</sup>، ۲۰۰۷؛ یان<sup>۱۰</sup>، ۲۰۰۵). در ادبیات از این توزیع‌ها برای پیش‌بینی VaR نیز استفاده شده است (دندرامیس و همکاران، ۲۰۱۴؛ لین و همکاران<sup>۱۱</sup>، ۲۰۱۴)؛ دوم، روش‌های مبتنی بر بسط توزیع‌ها که از توزیع گاوسی تعدیل‌یافته نسبت به گشتاورهای مرتبه بالاتر، استفاده می‌کنند و غالباً به منظور تقریب توزیع اولیه به کار گرفته می‌شوند. یک نمونه از این روش‌ها، بسط‌های گرام-چارلییر است که از مشتق‌های تابع چگالی نرمال بدست می‌آید (لئون و همکاران<sup>۱۲</sup>، ۲۰۰۵) به گونه‌ای که ویژگی لپتوکورتیک<sup>۱۳</sup> نیز در آن در نظر گرفته می‌شود؛ که در نتیجه یک تابع چگالی حساس به دنباله‌ها محسوب می‌شود.

بسط‌های گرام-چارلییر در انتهای قرن ۱۹م و ابتدای قرن ۲۰م شناخته شدند؛ از این رو در بسیاری از علوم از جمله ریاضیات، فیزیک، ستاره‌شناسی، مالی و ... به طور گسترده مورد استفاده قرار گرفته‌اند

<sup>1</sup> Kou & Peng

<sup>2</sup> Easy Implementation

<sup>3</sup> Wang et al.

<sup>4</sup> Hansen

<sup>5</sup> Theodossiou

<sup>6</sup> Zhu & Galbraith

<sup>7</sup> Gerlach et al.

<sup>8</sup> Dendramis et al.

<sup>9</sup> Lanne & Pentti

<sup>10</sup> Yan

<sup>11</sup> Lin et al.

<sup>12</sup> León et al.

<sup>13</sup> Leptokurtosis



(لین<sup>۱</sup>، ۲۰۲۳). در دهه‌های گذشته از بسط‌های گرام-چارلیر نوع A<sup>۲</sup> که مبتنی بر توزیع نرمال هستند، به‌منظور تخمین توابع فرکانس استفاده شده است؛ برای مثال، نخستین بار سارگان<sup>۳</sup> (۱۹۷۵) و فیلیپس<sup>۴</sup> (۱۹۷۷) بسط‌های گرام-چارلیر را برای تقریب تابع توزیع تخمین‌زنده‌ها توسعه دادند. جارو و راد<sup>۵</sup> (۱۹۸۲) نشان دادند که چگونه هر توزیع دلخواه می‌تواند یک فرآیند تصادفی مفروض از اوراق بهادار را برحسب سری بسط‌های شامل گشتاورهای دوم و بالاتر تقریب بزند. جان‌دو و راکینگر (۲۰۰۱) از بسط مقید<sup>۶</sup> برای تخمین چگالی‌های ریسک-خنثی استفاده نموده‌اند. کورادو<sup>۷</sup> (۲۰۰۷) با ارائه یک قید مارتینگال پنهان<sup>۸</sup> به مدل‌سازی قیمت‌گذاری اختیار معامله برمبنای بسط‌های گرام-چارلیر از تابع چگالی نرمال پرداخت. در ادبیات از بسط‌های توزیع‌ها برای پیش‌بینی معیارهای ریسک نیز استفاده شده است (زویا و همکاران<sup>۹</sup>، ۲۰۱۸؛ علی‌زاده و گابریلسن<sup>۱۰</sup>، ۲۰۱۳؛ مالین<sup>۱۱</sup>، ۲۰۱۰).

به‌هرحال باوجود پیشرفت‌هایی که تاکنون در ادبیات در زمینه مدل‌سازی چگالی بازده دارایی‌ها صورت گرفته است، هنوز هم شکاف‌هایی دیده می‌شود؛ نخست، بحران‌ها و تلاطم‌های مالی ثابت کرده‌اند که شوک‌ها اثر قابل‌توجهی بر توزیع بازده دارند؛ به‌طوری‌که علاوه بر ایجاد دنباله‌های پهن، با واکنش نامتقارن دو دنباله همراه هستند (جیمز و همکاران، ۲۰۲۲). این واقعیت لزوم واردکردن چولگی و کشیدگی را در مدل‌سازی بازده دارایی‌ها به‌عنوان منابع اطلاعاتی مفید برای پیش‌بینی ریسک می‌رساند. برخی پژوهش‌ها از گشتاورهای سوم و چهارم در مدل‌سازی نوسان‌پذیری استفاده نموده‌اند (جیمز و همکاران، ۲۰۲۲؛ واکا و همکاران<sup>۱۲</sup>، ۲۰۲۲؛ واکا و زویا<sup>۱۳</sup>، ۲۰۱۹؛ وانگ و همکاران، ۲۰۲۲). لئون-کاماچو و همکاران<sup>۱۴</sup> (۲۰۲۲) گرایش سرمایه‌گذاران نسبت به ریسک را در چولگی و کشیدگی، از طریق فرض توزیع گرام-چارلیر برای بازده، وارد نمودند.

از طرف دیگر، علی‌رغم اینکه هر دو مشخصه کشیدگی و چولگی بر ریسک دنباله تأثیر مشترکی دارند (مالین و پروتی، ۲۰۰۰؛ لئون و نیگوئز<sup>۱۵</sup>، ۲۰۲۰؛ دل باریو و همکاران<sup>۱۶</sup>، ۲۰۲۰) در مطالعات تجربی مالی توجهی به اهمیت تعامل بین این دو ویژگی برای مدیریت ریسک نشده است؛ این

<sup>1</sup> Lin

<sup>2</sup> Gram-Charlier Type A Expansion

<sup>3</sup> Sragan

<sup>4</sup> Phillips

<sup>5</sup> Jarrow and Rudd

<sup>6</sup> Constrained Expansion

<sup>7</sup> Corrado

<sup>8</sup> Hidden Martingale Restriction

<sup>9</sup> Zoia et al.

<sup>10</sup> Alizadeh & Gabrielsen

<sup>11</sup> Mauleón

<sup>12</sup> Vacca et al.

<sup>13</sup> Vacca & Zoia

<sup>14</sup> León-Camacho et al.

<sup>15</sup> León & Níguez.

<sup>16</sup> Del Brio et al.

درحالیست که در علم فیزیک، لاییت و همکاران<sup>۱</sup> (۲۰۰۷) به یک رابطهٔ سهموی بین گشتاورهای مرکزی نرمال سوم و چهارم دست یافتند. در ادبیات مالی، تنها مطالعهٔ جیمنز و همکاران (۲۰۲۲b) یافت شد که تعامل چولگی و کشیدگی مازاد را در تابع چگالی بازده دارایی به فرم بسط‌های گرام-چارلیز تعمیم‌یافته وارد کرده و به تخمین معیارهای ریسک برای بازدهٔ S&P500 پرداختند.

در کاربردهای تجربی نشان داده شده است که به دلیل خطای ناشی از برش بسط‌های نامتناهی، فرمول اولیه از بسط گرام-چارلیز و تعمیم‌های آن ممکن است مقادیر منفی داشته باشند که متناقض با تعریف تابع چگالی احتمال است. بدین منظور برخی پژوهشگران فرم‌های مختلفی را برای تبدیل بسط‌های گرام-چارلیز پیشنهاد داده‌اند (لین و ژانگ<sup>۲</sup>، ۲۰۲۲؛ لئون و همکاران، ۲۰۰۵). جیمنز و همکاران (2022b) با وارد کردن حاصل ضرب گشتاورهای سوم و چهارم در سری‌های گرام-چارلیز، مشکل منفی شدن مقدار تابع چگالی را حل کردند.

در زمینهٔ پیش‌بینی ریسک بازدهٔ سهام، برخی پژوهش‌ها از مدل‌های خانواده GARCH مبتنی بر بسط گرام-چارلیز استفاده نموده‌اند. وانگ و همکاران (۲۰۲۲) یک مدل جدید تحت عنوان GARCH-RSRK را پیشنهاد دادند که همزمان بازده، نوسان‌پذیری تحقق‌یافته، چولگی تحقق‌یافته و کشیدگی تحقق‌یافته را تعیین می‌کند و به ارزیابی پیش‌بینی VaR با استفاده از بسط کورنیش-فیشر<sup>۳</sup> برای چهار شاخص اصلی بورس سهام چین با فراوانی روزانه پرداختند. واکا و همکاران (۲۰۲۲) از چندجمله‌ای‌های متعامد برای تعمیم گشتاورهای توزیع متغیرهای تصادفی استفاده نمودند و آن را برای مدل‌سازی چولگی و کشیدگی توزیع‌های شرطی مدل‌های GARCH به کاربردند. بر طبق یافته‌ها، مدل‌سازی جملات اختلال GARCH بر اساس چندجمله‌ای‌های متعامد دقت پیش‌بینی ریسک را به‌طور کارا بهبود می‌بخشد. واکا و زویا (۲۰۱۹) از بسط گرام-چارلیز با لحاظ گشتاورهای سوم و چهارم برای مدل‌سازی جملات اختلال مدل GARCH استفاده نمودند. وو و شیه<sup>۴</sup> (۲۰۰۷) یک مدل GARCH تحقق‌یافته با خطاهای مبتنی بر چگالی گرام-چارلیز را برای پیش‌بینی VaR پیشنهاد دادند. به‌هرحال این محققین در مدل‌سازی خود از گشتاورهای مرتبه بالاتر توزیع بازده استفاده نکرده‌اند.

از طرف دیگر، در ادبیات همچنین از رویکردهای نیمه-ناپارامتریک برای ارزیابی ریسک کریپستوکارنسی‌ها (جیمنز و همکاران، 2022b؛ جیمنز و همکاران، ۲۰۲۰)، کالاها (هو و همکاران، ۲۰۱۹؛ عمر و همکاران<sup>۵</sup>، ۲۰۲۳؛ کارنرو و همکاران<sup>۶</sup>، ۲۰۲۳) و قیمت‌گذاری اوراق مشتقه (دل باریو

<sup>1</sup> Labit et al.

<sup>2</sup> Lin & Zhang

<sup>3</sup> Cornish-Fisher Expansion

<sup>4</sup> Wu and Shieh.

<sup>5</sup> Umar et al.

<sup>6</sup> Carnero et al.

و همکاران<sup>۱</sup>، ۲۰۱۴؛ دل باریو و همکاران، ۲۰۲۰؛ کورتس و همکاران<sup>۲</sup>، ۲۰۲۰) نیز استفاده شده است.

در داخل کشور، برخی پژوهشگران معیار ارزش در معرض ریسک را با فرض توزیع پارامتریک برای بازده سهام تخمین زده‌اند. در این زمینه، از خانواده مدل‌های GARCH تحت توزیع t-استیودنت برای جملات خطای معادله میانگین استفاده شده است (فرهادیان و همکاران، ۲۰۲۰؛ کیانی و همکاران، ۲۰۱۵؛ بیگ خورمیزی و رافعی، ۲۰۲۰؛ نمکی و همکاران، ۲۰۲۲). برای نمونه، ترکی و همکاران (۲۰۲۳) ارزش در معرض خطر سری زمانی بازده شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران را با استفاده از خانواده مدل‌های GARCH و فرض توزیع t-استیودنت برای جملات خطا، برآورد نمودند. امیری و همکاران (۲۰۲۱) ارزش در معرض ریسک شاخص‌های چند صنعت را با استفاده از خانواده مدل‌های GARCH برآورد نمودند. آن‌ها، در تصریح معادله واریانس شرطی، توزیع‌های مختلفی را برای جمله خطا فرض کردند از جمله توزیع نرمال، توزیع t-استیودنت، توزیع t-استیودنت چوله، توزیع لوی از نوع توزیع وارون-گوسی نرمال و توزیع لوی از نوع توزیع هذلولوی تعمیم‌یافته. مدرسی و همکاران (۲۰۲۱) ارزش در معرض خطر شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران را با فرض فرآیند لوی تلاطم تصادفی برای توزیع بازده محاسبه نمودند. همچنین با استفاده از الگوریتم بهینه‌سازی ترکیبی ازدحام ذرات، پارامترهای این مدل را تخمین زدند. مهراسا و محمدی (۲۰۱۹) دو معیار VaR و CVaR را با استفاده از مدل‌های خانواده GARCH مبتنی بر توزیع نرمال و توزیع فرین محاسبه نمودند و براساس نتایج پس‌آزمایی عملکرد برتر مدل ARMA-GARCH-EVT را در پیش‌بینی ارزش در معرض خطر نتیجه گرفتند. محمدیان امیری و ابراهیمی (۲۰۱۸) در پژوهشی با استفاده از روش هموارسازی نمایی هلت-ویتترز به پیش‌بینی ارزش در معرض خطر شاخص‌های خودرو و بانک که با استفاده از مدل GARCH محاسبه شده است، پرداختند. اعتبار مدل فوق نیز براساس نتایج چندین آزمون پس‌آزمایی مورد تأیید قرار گرفت.

برخی دیگر از محققین، از روش‌های ناپارامتریک برای تخمین VaR استفاده کرده‌اند. بت‌شکن و همکاران (۲۰۱۸) بر مبنای رویکرد ناپارامتریک تحلیل مولفه‌های اساسی به برآورد و ارزیابی ارزش در معرض ریسک و ریزش مورد انتظار ناپارامتریک پرداختند. باستان‌زاد و داودی (۲۰۱۷) ارزش در معرض ریسک را بر اساس رویکرد ناپارامتریک نظریه ارزش فرین برای جملات اختلال در قالب مدل GARCH، محاسبه نموده‌اند.

ملاحظه می‌شود که تاکنون از رویکرد نیمه-ناپارامتریک برای برآورد معیارهای ریسک در داخل کشور استفاده نشده است. همچنین، تأثیر گشتارهای مرتبه بالاتر از جمله چولگی و کشیدگی مازاد، برای اندازه‌گیری و پیش‌بینی ریسک در بورس اوراق بهادار تهران نیز مورد توجه قرار نگرفته است.

<sup>1</sup> Del Brió et al.

<sup>2</sup> Cortés et al.

پژوهش‌های داخلی، گشتاورهای مرتبه سوم و چهارم را مستقیماً در مدل قیمت‌گذاری دارایی‌های سرمایه‌ای و مدل فاما و فرنچ وارد کرده‌اند و تأثیر آن‌ها را بر بازده و قیمت‌گذاری سهام از طریق تخمین ضرایب برای این دو متغیرها مورد بررسی قرار داده‌اند (تهرانی و همکاران، ۲۰۱۱؛ شکرخواه و همکاران، ۲۰۱۷؛ طالبی و همکاران، ۲۰۲۱).

### ۳. روش‌شناسی پژوهش

در پژوهش حاضر از سری زمانی شاخص TEPIX، شامل ۱۳ سال قیمت روزانه ( $P_t$ ) طی بازه ۱۳۸۷/۱/۱ تا ۱۴۰۲/۵/۳۱ استفاده می‌شود. داده‌های قیمت شاخص TEPIX از بانک اطلاعاتی ره‌آورد نوین ۳ جمع‌آوری شده است که شامل تعداد  $T = 3656$  مشاهده روزانه می‌شود. با تمرکز بر دنباله راست توزیع شاخص TEPIX، درصد زیان روزانه به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$L_t = -100[\ln(P_t) - \ln(P_{t-1})] \quad \text{رابطه (۱)}$$

لازم به ذکر است که کلیه تجزیه و تحلیل‌ها با استفاده از نرم‌افزارهای R و MATLAB انجام می‌شود.

### رویکرد نیمه-ناپارامتریک

در ادبیات، تخمین نیمه-ناپارامتریک برای یک تابع فرکانس براساس یک سری نامتناهی از مشتق‌های تابع چگالی احتمال نرمال استاندارد  $\phi(x_t)$  حاصل می‌شود؛ بالأخص برای یک تابع  $f(x_t)$  مفروض که در رابطه (۲) به شرح زیر صدق می‌کند با در نظر گرفتن  $n$  جمله می‌تواند به صورت زیر بیان شود:

$$f(x_t) = \left[ 1 + \sum_{s=1}^n \gamma_s H_s(x_t) \right] \phi(x_t) \quad \text{رابطه (۲)}$$

$$\phi(x_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

به طوری که  $H_s(x_t)$ ها، سری متعامد از چندجمله‌ای‌های هرمیت (HP) هستند که به طور متناوب از طریق مشتق‌گیری بدست می‌آیند  $(-D)^s \phi(x_t) = H_s(x_t) \phi(x_t)$  و  $D = \frac{d}{dx_t}$ . وقتی  $n \rightarrow \infty$  میل می‌کند، رابطه (۲) به سری‌های GC نوع A میل می‌کند (کندال<sup>۱</sup>، ۱۹۷۷) که به طور مجانبی تابع فرکانس منظم<sup>۲</sup> را نمایش می‌دهد. انتگرال این بسط مساوی عدد یک است اما برای  $n$  متناهی قید مثبت بودن تنها در دامنه محدودی از  $x$  برآورده می‌شود. برای حل این مشکل، در ادبیات تبدیل‌های مثبت مختلفی برای چگالی‌های GC پیشنهاد شده است (نیگوئز و پروتی<sup>۳</sup>، ۲۰۱۲؛

<sup>۱</sup> Kendall

<sup>۲</sup> Regular Frequency Function

<sup>۳</sup> Níguez & Perote

لئون و همکاران<sup>۱</sup>، (۲۰۰۹). در رابطه (۲)، پارامترهای  $\gamma_s$  مستقیماً به  $S$  گشتاور اول مربوط می‌شوند؛ که با استفاده از آن‌ها می‌توان اهمیت نسبی این گشتاورها را در برازش تابع فرکانس  $f(x_t)$  اندازه‌گیری نمود. در پژوهش حاضر، حاصل ضرب مقاطع جمله‌های HP نیز در رابطه (۲) وارد می‌شود که در اینصورت توزیع GC تعمیم‌یافته (mGC) حاصل می‌شود که در آن می‌توان تعامل بین گشتاورها را به‌طور صریح از طریق پارامترهای  $\delta_{ij}$  بدست آورد. همچنین، با اضافه کردن جملات مقاطع می‌توان از منفی شدن مقدار تابع چگالی احتمال نیز جلوگیری خواهد نمود (جیمز و همکاران، ۲۰۲۲b).

$$g(x_t) = \left[ 1 + \sum_{s=1}^n \gamma_s H_s(x_t) + \sum_{i=1}^n \gamma_s \sum_{j=1 \neq i}^n \delta_{ij} H_i(x_t) H_j(x_t) \right] \phi(x_t) \quad \text{رابطه (۳)}$$

در اکثر کاربردهای تجربی، محققین فقط چند جمله‌ای‌های هرمیت مرتبه سوم و چهارم یعنی  $H_3(x_t) = x_t^3 - 3x_t$  و  $H_4(x_t) = x_t^4 - 6x_t^2 + 3$  را در نظر گرفته‌اند (شلگل<sup>۲</sup>، ۲۰۱۳؛ لئون و همکاران، ۲۰۰۹؛ یورچنکو و همکاران<sup>۳</sup>، ۲۰۰۴)؛ از این رو ضرایب  $\gamma_3$  و  $\gamma_4$  به ترتیب به چولگی و کشیدگی مازاد مرتبط می‌شوند. به‌علاوه، در پژوهش حاضر به پیروی از جیمز و همکاران (۲۰۲۲b)، تعامل بین  $H_3(x_t)$  و  $H_4(x_t)$  که با پارامتر  $\delta$  نشان داده می‌شود نیز در تابع چگالی  $g(x_t)$  وارد می‌شود تا بتوان برازش بهتری را در دنباله‌ها بدست آورد (جیمز و همکاران، ۲۰۲۲b):

$$g(x_t) = [1 + \gamma_3 H_3(x_t) + \gamma_4 H_4(x_t) + \delta H_3(x_t) H_4(x_t)] \phi(x_t) \quad \text{رابطه (۴)}$$

توجه شود که  $\int g(x_t) dx_t = 1$  چون طبق تعریف متعامد بودن داریم  $\int H_i(x_t) H_j(x_t) \phi(x_t) dx_t = 0, \forall i \neq j$ .

### معیارهای ریسک

در این پژوهش، به‌منظور اعتبارسنجی مدل برای مدیریت ریسک از دو معیار VaR و MS استفاده می‌شود. برای یک سری زمانی بازده، با میانگین شرطی بازده  $\mu_t$ ، انحراف معیار (نوسان‌پذیری) بازده  $\sigma_t$ ، توزیع mGC برای فاصله اطمینان  $\alpha$  و افق زمانی  $t + 1$ ، معیارهای VaR و MS به‌صورت زیر بدست می‌آیند:

$$\text{VaR}_{\alpha, t+1} = \mu_{t+1} + \sigma_{t+1} q_\alpha \quad \text{رابطه (۵)}$$

$$\text{MS}_{\alpha, t+1} = \text{VaR}_{\frac{1+\alpha}{2}, t+1} \quad \text{رابطه (۶)}$$

<sup>1</sup> León et al.

<sup>2</sup> Schlögl

<sup>3</sup> Jurczenko et al.

به طوری که  $q_\alpha$ ، یعنی کوانتیل  $-\alpha$  از تابع توزیع تجمعی گرام-چارلیر mGC، براساس رابطه (۷) به شرح زیر محاسبه می‌شود:

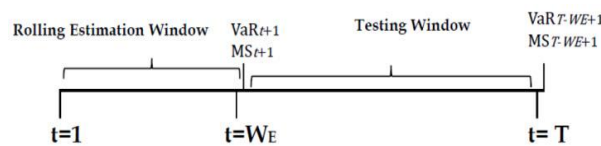
$$\int_{-\infty}^{q_\alpha} g(x_t) dx_t = \int_{-\infty}^{q_\alpha} \phi(x_t) dx_t - \phi(q_\alpha) [\gamma_3 H_2(q_\alpha) + \gamma_4 H_3(q_\alpha) + \delta H_4(q_\alpha) H_2(q_\alpha) + 4\delta H_3(q_\alpha) H_1(q_\alpha) + 12\delta H_2(q_\alpha) 24\delta] \quad \text{رابطه (۷)}$$

در پژوهش حاضر به پیروی از دستورالعمل کمیته نظارت بر بانکداری بازل در زمینه محاسبه ریسک، دو معیار ریسک فوق در سطح اطمینان ۹۹ درصد، یعنی VaR - ۹۹ درصد و - ۹۹ درصد MES، محاسبه می‌شوند. با توجه به رابطه (۶)، برای محاسبه MS در سطح ۹۹ درصد می‌باید VaR در سطح ۹۹/۵ درصد تخمین زده شود.

### روش‌های بک‌تست

در این پژوهش از تکنیک‌های بک‌تست، به منظور بررسی عملکرد معیارهای VaR و MS مبتنی بر تصریح‌های مختلف از چگالی GC، برحسب پیش‌بینی زبان‌های حقیقی تاریخی<sup>۱</sup> شاخص TEPIX، مقایسه می‌شود. لازم به ذکر است که چون محاسبه MS مستقیماً براساس VaR انجام می‌شود (رابطه (۶))، در روش‌های بک‌تست ریزش میانه از همان روش‌های بک‌تست ارزش در معرض ریسک، استفاده می‌شود.

روش‌های بک‌تست، کل نمونه T را به یک پنجره تخمین غلتان<sup>۲</sup> با اندازه  $W_E$  و یک پنجره آزمون<sup>۳</sup> با اندازه  $W_T = T - W_E$  تقسیم می‌کنند (شکل (۱)). پیش‌بینی یک روز آینده VaR در امتداد پنجره آزمون با غلتاندن پنجره تخمین  $W_E$ ، به صورت اضافه کردن یک مشاهده جدید حاصل می‌شود به گونه‌ای که همچنان اندازه پنجره تخمین بدون تغییر باقی بماند. سپس، مقدار پیش‌بینی شده VaR که از همه پنجره‌های تخمین غلتانده شده بدست آمده‌اند با مقدار زیان واقعی در همان دوره t، مقایسه می‌شود.



شکل ۱. فرآیند بک‌تست  
منبع: جیمنز و همکاران (۲۰۲۲ا)

<sup>۱</sup> Ex-post real losses  
<sup>۲</sup> a Rolling Estimation Window  
<sup>۳</sup> a Testing Window

براین اساس، یک نقض یا استثناء در روز  $t + 1$  اتفاق خواهد افتاد هرگاه زبان‌های مشاهده شده  $(L_{t+1})$  بیشتر از مقدار پیش‌بینی شده  $VaR$  در سطح احتمال مفروض  $\alpha$  باشد؛ بدین ترتیب می‌توان یک تابع شاخص به صورت زیر تعریف نمود:

$$I_{t+1}(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{if } L_{t+1} \geq VaR_{t+1}(\alpha) \\ 0 & \text{if } L_{t+1} < VaR_{t+1}(\alpha) \end{cases} \quad \text{رابطه (۸)}$$

چنانچه تعداد نقض‌ها یا استثناءها از درصد  $1 - \alpha$  بیشتر شود، به معنای آن است که استثناءهای مدل بیش‌تر از حد<sup>۱</sup> و بنابراین ریسک آن کمتر از حد تخمین زده شده است (دانیلسون<sup>۲</sup>، ۲۰۱۱).

در پژوهش حاضر، برای اعتبارسنجی معیار  $VaR$ ، آزمون پوشش برنولی<sup>۳</sup>، آزمون استقلال، آزمون پوشش شرطی (CC)، آزمون کوانتیل پویا<sup>۴</sup> (DQ)، متوسط زیان کوانتیل<sup>۵</sup> (QL) و نسبت زیان کوانتیل<sup>۶</sup> انجام می‌شود.

#### ۴. تحلیل داده‌ها و یافته‌ها

آماره‌های توصیفی در جدول (۱)، مشخصه‌های دنباله پهن و چولگی منفی را در توزیع درصد زیان روزانه TEPIX نشان می‌دهد؛ از این‌رو، برای داشتن پیش‌بینی‌های ریسک معتبر لزوم مدل‌سازی جملات اختلال در مدل GARCH را براساس توزیع غیرنرمال می‌رساند.

جدول ۱. آماره‌های توصیفی برای زبان‌های TEPIX

| تعداد مشاهدات | مینیمم | میانه  | میانگین | ماکزیمم | انحراف معیار | واریانس | کشیدگی مازاد | چولگی  |
|---------------|--------|--------|---------|---------|--------------|---------|--------------|--------|
| ۳۶۵۶          | -۵/۲۶۱ | -۰/۰۵۳ | -۰/۱۴۰  | ۵/۶۷۰   | ۱/۰۶۳        | ۱/۱۳۰   | ۳/۶۶۰        | -۰/۲۰۳ |

بر اساس شواهد تجربی فوق و نیز به پیروی از دل‌باریو و همکاران<sup>۷</sup> (۲۰۱۱) مدل‌سازی زبان‌های بازده شاخص کل قیمت سهام طی یک فرآیند تخمین دومرحله‌ای مطابق گام‌های زیر انجام می‌شود؛ سپس براساس این مدل‌سازی، معیارهای ریسک در دنباله را ست توزیع بازده برآورد می‌شوند:

گام ۱: مدل  $ARMA(1,1)-GARCH(1,1)$  با فرض توزیع گاوسی برای جملات اختلال و با استفاده از رویکرد شبه-حداکثر راستنمایی (QML) تخمین زده شود.

<sup>1</sup> Overestimate

<sup>2</sup> Danielsson

<sup>3</sup> Bernoulli Coverage

<sup>4</sup> Dynamic Quantile

<sup>5</sup> Quantile Loss (QL)

<sup>6</sup> Quantile Loss Ratio

<sup>7</sup> Del Brio et al.

گام ۲: پارامترهای بسط گرام-چارلیبر تعمیم‌یافته (رابطه ۴) و سایر تصریح‌ها با استفاده از پسماندهای استاندارد شده که از گام قبل استخراج شده‌اند تخمین زده می‌شوند. برازش تصریح‌های مختلف چگالی گرام-چارلیبر با استفاده از روش حداکثر راستنمایی انجام می‌شود.

در پژوهش حاضر فرض می‌شود که سری زمانی زبان‌های شاخص TEPIX دارای فرآیند  $ARMA(1,1)$  هستند به گونه‌ای که واریانس شرطی این فرآیند  $\sigma_t$ ، از ساختار  $GARCH(1,1)$  پیروی می‌کند:

$$L_t = \varphi_0 + \varphi_1 L_{t-1} + \eta_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t = \sigma_t z_t$$

$$z_t \sim H(0, 1)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$$

به طوری که  $|\varphi_1| < 1$ ،  $\omega > 0$ ،  $\alpha \geq 0$ ،  $\beta \geq 0$  و  $\alpha + \beta < 1$ . به علاوه، فرض فرآیند وایت‌نویز بودن جمله  $z_t$  کنار گذاشته می‌شود و چهار تصریح برای تابع چگالی احتمال  $H$  از جملات اختلال معادله میانگین شرطی، در نظر گرفته می‌شود: بسط گرام-چارلیبر نوع  $A$  شامل متغیر چولگی با پارامتر  $\gamma_3$ ،  $GC_3(\gamma_3)$ ؛ بسط گرام-چارلیبر نوع  $A$  شامل متغیر کشیدگی مازاد با پارامتر  $\gamma_4$ ،  $GC_4(\gamma_4)$ ؛ بسط گرام-چارلیبر نوع  $A$  شامل متغیرهای چولگی و کشیدگی مازاد به ترتیب با پارامترهای  $\gamma_3$  و  $\gamma_4$ ،  $GC(\gamma_3 \gamma_4)$ ؛ و بسط گرام-چارلیبر نوع  $A$  تعمیم‌یافته که علاوه بر چولگی و کشیدگی مازاد، تعامل بین این دو گشتاور را با پارامتر  $\delta$  نیز دربر می‌گیرد،  $mGC(\gamma_3 \gamma_4 \delta)$ .

جدول (۲)، تخمین‌های ML مربوط به برازش تصریح  $ARMA(1,1)$ - $GARCH(1,1)$  و برازش‌های چهار تصریح فوق از چگالی GC را نشان می‌دهد.

جدول ۲. نتایج برازش مدل  $ARMA(1,1)$ - $GARCH(1,1)$  تحت چگالی‌های GC برای سری زمانی زبان‌های

شاخص TEPIX

| عنوان       | $GC(\gamma_4)$         | $GC(\gamma_3)$ | $GC(\gamma_3 \gamma_4)$ | $mGC(\gamma_3 \gamma_4 \delta)$ |
|-------------|------------------------|----------------|-------------------------|---------------------------------|
| گام اول     |                        |                |                         |                                 |
| $\varphi_0$ | -۰/۰۰۳۰۰<br>(۰/۸۱۱۱۷)  |                |                         |                                 |
| $\varphi_1$ | -۰/۲۱۲۲۱*<br>(۰/۰۰۰۰۴) |                |                         |                                 |
| $\eta_1$    | -۰/۲۲۹۸۴*<br>(۰/۰۰۰۰۱) |                |                         |                                 |
| $\Omega$    | -۰/۰۲۸۳۴*<br>(۰/۰۰۰۰۰) |                |                         |                                 |
| A           | -۰/۷۳۵۰۸*<br>(۰/۰۰۰۰۰) |                |                         |                                 |
| B           | -۰/۲۳۶۹۱*              |                |                         |                                 |



|  |   |                                       | (/۰۰۰۰)                                |            |
|--|---|---------------------------------------|--|------------|
|  |   |                                       |  | گام دوم    |
| $-.02882^*$<br>( $-.01604$ - $-.01028$ ) | $-.05432^*$<br>( $-.01805$ - $-.0719$ ) | $-.0734^*$<br>( $-.0195$ - $-.0048$ ) | -                                      | $\gamma_3$ |
| $4/6453^*$<br>( $4/4012$ - $4/8894$ )    | $4/64133^*$<br>( $4/3971$ - $4/8855$ )  | -                                     | $4/63807^*$<br>( $4/3939$ - $4/8822$ ) | $\gamma_4$ |
| $.03674^*$<br>( $-.0143$ - $-.08780$ )   | -                                       | -                                     | -                                      | $\delta$   |
| $-.2867$                                 | $-2/0012$                               | $-2/2950$                             | $-2/0144$                              | AIC        |
| $-115/8$                                 | $3655/005$                              | $3768/9$                              | $3655/4$                               | LogLik     |

در گام اول، p-مقدار تخمین پارامترها در داخل پرنانتز هستند. در گام دوم، داخل پرنانتز، فاصله اطمینان ۹۵ درصد را برای پارامترهای چگالی‌های GC، نشان می‌دهد. \* معناداری در سطح ۵ درصد را نشان می‌دهد.

لازم به ذکر است که تخمین‌های ML در جدول (۲) مربوط به برازش درون نمونه‌ای مدل هستند که با استفاده از اولین پنجره بک‌تست (پنجره تخمین) با اندازه  $W_E = 2656$  مشاهده، محاسبه شده‌اند.<sup>۱</sup> از جدول (۲) ملاحظه می‌شود که پارامترهای زوج و فرد ( $\gamma_3$  و  $\gamma_4$ ) در همه تصریح‌های چگالی GC از نظر آماری معنادار هستند و نشانگر چولگی منفی و دنباله پهن و کشیده (لیپتوکرتوسی) سری زمانی زبان TEPIX می‌باشند؛ مقدار پارامتر اثر متقاطع  $\delta$  در تصریح GC تعمیم‌یافته (mGC) نیز معنادار است که منعکس‌کننده محتوای اطلاعاتی معنادار از نظر اقتصادی و مالی چولگی و کشیدگی و نیز تعامل بین آن‌ها است. همچنین، نتایج حاصل از دو معیار نیکویی برازش لگاریتم راستنمایی (LogLik) و AIC دلالت بر برتری تصریح  $GC(\gamma_3)$  در برازش زبان شاخص TEPIX، در مقایسه با سه تصریح دیگر دارد.

نتایج درون نمونه‌ای فوق (جدول (۲)) براساس یافته‌های برون نمونه‌ای مدل‌ها برحسب هر دو معیار VaR و MS، نیز تأیید می‌شود. جدول (۳)، نتایج آزمون‌های بک‌تست مدل‌ها را در پنل‌های A و B به ترتیب برای ۹۹ درصد VaR- و ۹۹ درصد MS- طی دوره برون نمونه‌ای متشکل از  $T - W_E = 1000$  روز، گزارش می‌کند. عملکرد مدل‌ها نیز برحسب آزمون‌های مختلف بک‌تست در سطح ۹۵ درصد، مورد ارزیابی قرار گرفته است تا دلالت بر قوت نتایج داشته باشد. به علاوه، آزمون DQ با چهار وقفه اجرا شده است و \* معناداری در سطح ۵ درصد را نشان می‌دهد. به‌طور کلی، برای اکثر تصریح‌ها به‌جز چگالی  $GC(\gamma_3 \delta)$ ، همه آزمون‌های بک‌تست برای هر دو معیار VaR و MS، نتایج مشابهی را نشان می‌دهند.

<sup>۱</sup> به منظور برازش دقیق‌تر مدل، پنجره تخمین و پنجره آزمون به ترتیب با اندازه ۲۶۵۶ مشاهده و ۱۰۰۰ مشاهده انتخاب شده‌اند.

از جدول (۳) ملاحظه می‌شود که برای VaR-۹۹ درصد، بسطی از GC که فقط شامل چولگی ( $\gamma_3$ ) است، برطبق همهٔ آزمون‌ها در سطح ۵ درصد پذیرفته می‌شود و همان‌گونه که نشان داده شد پارامتر چولگی نیز در سطح ۵ درصد از نظر آماری معنادار است؛ برای سه مدل دیگر علی‌رغم اینکه مقدار بدست آمده برای پارامترها از نظر آماری در سطح ۵ درصد معنادار بدست آمده است، اما براساس آزمون‌های بک‌تست در سطح ۵ درصد پذیرفته نمی‌شوند. به‌هرحال برخلاف VaR-۹۹ درصد، برای معیار MS-۹۹ درصد فقط عملکرد مدل  $GC(\gamma_3)$  آن‌هم تنها تحت آزمون استقلال در سطح ۵ درصد تأیید می‌شود. این در حالیست که برطبق نسبت QL، تحت هر دو معیار VaR و MS، مدل  $mGC(\gamma_3\gamma_4\delta)$  که شامل تعامل بین چولگی و کشیدگی نیز می‌شود عملکرد نسبی ضعیف‌تری در مقایسه با دو مدل  $GC(\gamma_4)$  و  $GC(\gamma_3\gamma_4)$  نشان می‌دهد؛ اما مدل  $GC(\gamma_3)$  عملکرد نسبی برتری نسبت به مدل  $mGC(\gamma_3\gamma_4\delta)$  دارد.

جدول ۳. نتایج آزمون‌های بک‌تست معیارهای ریسک ۹۹ درصد VaR- و ۹۹ درصد MS-

| پنل A: VaR-99% و تعداد استثناء مورد انتظار 50 (E.E) |              |                         |                           |                       |                                |                          |                                 |
|---|--------------|-------------------------|---------------------------|-----------------------|--------------------------------|--------------------------|---------------------------------|
| نسبت QL   | QL           | آزمون DQ                | آزمون CC                  | آزمون استقلال         | آزمون برنولی                   | تعداد استثناء تحقق‌یافته | مدل                             |
| -   | ۰/۳۴۴۱       | ۷۰۱۷/۸۷<br>(۰/۰۰۰)      | ۱۲۰۵/۹<br>(۰/۰۰۰)         | ۳۲/۲۴۳<br>(۰/۰۰۰)     | ۵۲/۵۲۴<br>(۰/۰۰۰)              | ۴۱۲                      | mGC( $\gamma_3\gamma_4\delta$ ) |
| ۱/۰۳۷۱  | ۰/۳۵۶۹       | ۶۷۷/۵۹۴<br>۵<br>(۰/۰۰۰) | ۱۲۲۰/۶<br>(۰/۰۰۰)         | ۳۱/۴۱۲<br>(۰/۰۰۰)     | ۵۲/۹۶<br>(۰/۰۰۰)               | ۴۱۵                      | GC( $\gamma_3\gamma_4$ )        |
| ۰/۴۵۲۸  | ۱/۵۵۸۲<br>۰  | ۱۸۹۰۵<br>(۰/۰۰۰)        | ۳/۱۸۱۱*<br>(۲۰۳۸۱)<br>(۰) | ۲/۱۰۰۴*<br>(۰/۱۴۷۲۶)  | -۰/۰۱۵۷<br>*<br>(۳۰۹۷۹)<br>(۰) | ۴۳                       | GC( $\gamma_3$ )                |
| ۱/۰۴۳۶  | ۱/۳۵۹۰۹<br>۰ | ۶۷۰/۵۱۴<br>۸<br>(۰/۰۰۰) | ۱۲۲۶<br>(۰/۰۰۰)           | ۳۱/۶۲<br>(۰/۰۰۰)      | ۵۳/۱۰۵<br>(۰/۰۰۰)              | ۴۱۶                      | GC( $\gamma_4$ )                |
| پنل B: MS-99% و تعداد استثناء مورد انتظار 50 (E.E)  |              |                         |                           |                       |                                |                          |                                 |
| نسبت QL   | QL           | آزمون DQ                | آزمون CC                  | آزمون استقلال         | آزمون برنولی                   | تعداد استثناء تحقق‌یافته | مدل                             |
| -   | ۰/۳۴۴۱       | ۷۰۱۷/۸۷<br>(۰/۰۰۰)      | ۱۲۰۵/۹<br>(۰/۰۰۰)         | ۳۲/۲۴۳<br>(۰/۰۰۰)     | ۵۲/۵۲۴<br>(۰/۰۰۰)              | ۴۱۲                      | mGC( $\gamma_3\gamma_4\delta$ ) |
| ۱/۰۳۷۱  | ۰/۳۵۶۹       | ۶۷۷/۵۹۴<br>۵<br>(۰/۰۰۰) | ۱۲۲۰/۶<br>(۰/۰۰۰)         | ۳۱/۴۱۲<br>(۰/۰۰۰)     | ۵۲/۹۶<br>(۰/۰۰۰)               | ۴۱۵                      | GC( $\gamma_3\gamma_4$ )        |
| ۰/۴۵۲۸  | ۱/۵۵۸۲<br>۰  | ۱۸۹۰۵<br>(۰/۰۰۰)        | ۳۳/۲۶۲<br>(۰/۰۰۰)         | ۰/۵۲۰۸۸*<br>(۰/۴۷۰۴۷) | -۴/۹۳۳۲<br>(۰/۰۰۰)             | ۱۶                       | GC( $\gamma_3$ )                |
| ۱/۰۴۳۶  | ۱/۳۵۹۰۹<br>۰ | ۶۷۰/۵۱۴<br>۸<br>(۰/۰۰۰) | ۱۲۲۰/۶<br>(۰/۰۰۰)         | ۳۱/۴۱۲<br>(۰/۰۰۰)     | ۵۲/۹۶<br>(۰/۰۰۰)               | ۴۱۵                      | GC( $\gamma_4$ )                |

همچنین، آزمون برنولی برای هر دو معیار VaR و MS بهترین عملکرد را برای مدل  $GC(\gamma_3)$  نتیجه می‌دهد. به علاوه، برای مدل فوق، تحت هر دو معیار VaR و MS در سطح ۹۹ درصد، تعداد استثناء مشاهده شده تقریباً نزدیک به تعداد استثناء مورد انتظار است؛ اما سایر مدل‌ها تعداد استثناء را بیشتر از حد تخمین می‌زنند؛ بنابراین مدل  $GC(\gamma_3)$  با تخمین کم‌تر از حد<sup>۱</sup> تعداد استثناء، می‌تواند معیارهای ریسک محافظه‌کارانه‌تری را فراهم کند.

تجزیه و تحلیل‌هایی که تا اینجا انجام شد تأیید می‌کند که چولگی و کشیدگی و تعامل بین آن‌ها از محتوای اطلاعاتی معناداری برخوردار هستند. به هر حال نتایج پیش‌بینی برون نمونه‌ای معیارهای ریسک، عمدتاً بر جمله چولگی در بسط‌های گرام-چارلیز به عنوان منبع اطلاعات معنادار برای دست یافتن به معیارهای دقیقی از ریسک تأکید می‌کند. بر این اساس می‌توان نتیجه گرفت که مدل سازی GARCH با تصریح چگالی GC که فقط شامل چولگی می‌شود در برازش نقاط حدی نسبت به تصریح‌های دیگر چگالی، عملکرد برتری دارد.

## ۵. بحث و نتیجه‌گیری

در پژوهش حاضر، برای نخستین بار توزیع زیان شاخص TEPIX بر اساس فرآیند ARMA-GARCH و بسط‌های گرام-چارلیز، مدل سازی می‌شود. عملکرد مدل از نظر دقت پیش‌بینی ریسک زیان شاخص TEPIX از طریق تکنیک‌های مختلف بک‌تست برای معیارهای VaR و MS در سطح ۹۹ درصد مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. استفاده از رویکرد نیمه-ناپارامتریک برای مدل سازی جملات اختلال مدل GARCH جهت محاسبه معیارهای VaR و MS تا پیش از این برای بورس اوراق بهادار تهران و برای سایر بازارهای سهام نوظهور مورد توجه قرار نگرفته است.

تجزیه و تحلیل‌های حاصل از برازش درون نمونه‌ای مدل‌ها دلالت بر محتوای اطلاعاتی معنادار جملات گشتاورهای سوم و چهارم توزیع بازده شاخص TEPIX و نیز جمله حاصل ضرب متقاطع این دو گشتاور در بسط گرام-چارلیز تعمیم یافته دارد. از دیدگاه نظری، با وارد کردن این پارامترها به همراه حاصل ضرب متقاطع آن‌ها مشکل مثبت بودن برش‌های متناهی از بسط‌های GC حل گردید. از دیدگاه تجربی، نتایج حاصل از آزمون‌های بک‌تست معیارهای VaR و MS در سطح ۹۹ درصد، بر عملکرد برتر مدل GARCH مبتنی بر توزیع GC که فقط شامل جمله چولگی می‌شود، در پیش‌بینی برون نمونه‌ای توزیع زیان‌های شاخص TEPIX، دلالت دارد؛ که از این رو با فراهم کردن معیارهای ریسک محافظه‌کارانه‌تر می‌تواند برای پیش‌بینی و ارزیابی ریسک مالی مفید واقع شود. سازگار با این یافته‌های تجربی، جیمنز و همکاران (۲۰۲۲a) و (۲۰۲۲b) برتری عملکرد چگالی گرام-چارلیز و تعمیم‌های آن را در افزایش دقت ارزیابی ریسک نتیجه گرفتند.

<sup>۱</sup> Underestimate

وانگ و همکاران (۲۰۲۲) نیز معنادار بودن محتوای اطلاعاتی گشتاورهای تحقق‌یافته مرتبه بالاتر را برای پیش‌بینی VaR نتیجه گرفتند. جیمز و همکاران (۲۰۲۰) نیز برتری رویکرد نیمه-ناپارامتریک را در مدل‌سازی ریسک نتیجه گرفتند. واکا و همکاران (۲۰۲۲) نیز نشان دادند که استفاده از چندجمله‌ای‌های متعامد در مدل‌سازی جملات اختلال مدل GARCH، دقت پیش‌بینی را بهبود می‌بخشد. در مقابل، پژوهش‌های داخلی شامل بیگ خورمیزی و رافعی (۲۰۲۰)، ترکی و همکاران (۲۰۲۳)، امیری و همکاران (۲۰۲۱)، مدرسی و همکاران (۲۰۲۱) و مهراسا و محمدی (۲۰۱۹) عملکرد برتر مدل‌های پارامتریک را در اندازه‌گیری ریسک نتیجه گرفته‌اند.

نتایج تجربی بدست آمده در این پژوهش دستاوردهایی برای مدیریت ریسک و تصمیم‌گیری تحت شرایط بی‌ثباتی شدید بازار و درجات بالای نا اطمینانی، دارد؛ از این لحاظ که ساختارهای پیچیده‌تر لزوماً بهترین عملکرد را برای پیش‌بینی نتیجه نمی‌دهند بلکه در نظر گرفتن پارامتر مرتبط با عدم تقارن توزیع به‌تنهایی می‌تواند منبع مرتبطی از اطلاعات باشد که می‌تواند معیارهای ریسک دقیقی را برای مشارکت‌کنندگان در بازار فراهم کند. همچنین، مدیران ریسک می‌توانند در تصمیم‌گیری‌های تخصیص پرتفوی، دقیق‌ترین مدل را براساس یافته‌های پژوهش حاضر مورد استفاده قرار دهند تا بتوانند به تخمین دقیق ریسک و از این رو به بهترین پوشش در برابر زیان‌های بالقوه دست یابند.

## ۶. پیشنهادها و محدودیت‌ها

پیشنهاد می‌شود در پژوهش‌های آتی عملکرد بسط‌های گرام-چارلیر علاوه بر پیش‌بینی ریسک، برای پیش‌بینی نوسان‌پذیری و حتی برای سایر تصریح‌های پیچیده‌تر از واریانس شرطی از جمله EGARCH، APARCH، Realized GARCH و ... نیز مورد بررسی قرار بگیرد. همچنین پیشنهاد می‌شود عملکرد چگالی گرام-چارلیر با فرض تصریح‌های پویا برای چولگی و کشیدگی شرطی علاوه بر تصریح ساختار GARCH برای نوسان‌پذیری شرطی، نیز مورد بررسی قرار بگیرد. پژوهشگران می‌توانند رویکردهای فوق را برای سایر شاخص‌های اصلی بورس اوراق بهادار تهران و حتی شاخص‌های صنایع با فراوانی‌های مختلف به کار بگیرند و دستاوردهای این پژوهش را تعمیم دهند. در پایان، محدودیت خاصی در انجام پژوهش حاضر وجود نداشت.

## سپاسگزاری

از کلیه افرادی که ما را در انجام این پژوهش یاری نمودند تشکر می‌نماییم. در این پژوهش از سازمان، نهاد یا شخصی کمک مالی دریافت نشده است.

## References

- Alizadeh, A. H., & Gabrielsen, A. (2013). Dynamics of credit spread moments of European corporate bond indexes. *Journal of Banking & Finance*, 37(8), 3125-3144.
- Amiri, H., Najafi Nejad, M., & Mousavi, S. M. (2021). Estimation of Value at Risk (VaR) Based On Lévy-GARCH Models: Evidence from Tehran Stock Exchange. *Journal of Money and Economy*, 16(2), 165-186. (In Persian)
- Bastanzad, H., & Davoudi, P. (2017). An evaluation of risk transmission over foreign exchange, real estate and stock markets in Iran's economy (An application of parametric and non-parametric value at risk approach). *Journal of Asset Management and Financing*, 5(4), 33-50. (In Persian)
- Biek Khormizi, M., & Rafei, M. (2020). Modeling Value at Risk of Futures Contract of Bahar Azadi Gold Coin with Considering the Historical Memory in Observations Application of FIAPARCH-CHUNG Models. *Journal of Asset Management and Financing*, 8(1), 57-82. (In Persian)
- Botshekan, M. H., Peymani, M., & Sadredin Karami, M. M. (2019). Estimate and evaluate non-parametric value at risk and expected shortfall based on principal component analysis in Tehran Stock Exchange. *Financial Management Perspective*, 8(24), 79-102. (In Persian)
- Carnero, M. A., León, A., & Níguez, T. M. (2023). Skewness in energy returns: estimation, testing and implications for tail risk. *The Quarterly Review of Economics and Finance*.
- Corrado, C. (2007). The hidden martingale restriction in Gram-Charlier option prices. *Journal of Futures Markets: Futures, Options, and Other Derivative Products*, 27(6), 517-534.
- Cortés, L. M., Mora-Valencia, A., & Perote, J. (2020). Retrieving the implicit risk neutral density of WTI options with a semi-nonparametric approach. *The North American Journal of Economics and Finance*, 54, 100862.
- Dadgar, Y., Dargahi, H., Gholizadeh, S. (2023). The Role of Investor Sentiment and Government Behaviour in Volatility of Tehran Stock Exchange Market: A Behavioural Economics Approach. *Quarterly Journal of Applied Theories of Economics*, 10(1), 191-214. (In Persian)
- Danielsson, J. (2011). *Financial risk forecasting: the theory and practice of forecasting market risk with implementation in R and Matlab*. John Wiley & Sons.

- Del Brio, E. B., Mora-Valencia, A., & Perote, J. (2020). Risk quantification for commodity ETFs: Backtesting value-at-risk and expected shortfall. *International Review of Financial Analysis*, 70, 101163.
- Del Brio, E. B., Mora-Valencia, A., & Perote, J. (2014). Semi-nonparametric VaR forecasts for hedge funds during the recent crisis. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 401, 330-343.
- Del Brio, E. B., Níguez, T. M., & Perote, J. (2011). Multivariate semi-nonparametric distributions with dynamic conditional correlations. *International Journal of Forecasting*, 27(2), 347-364.
- Dendramis, Y., Spungin, G. E., & Tzavalis, E. (2014). Forecasting VaR models under different volatility processes and distributions of return innovations. *Journal of Forecasting*, 33(7), 515-531.
- Ergün, A. T., & Jun, J. (2010). Time-varying higher-order conditional moments and forecasting intraday VaR and expected shortfall. *The Quarterly Review of Economics and Finance*, 50(3), 264-272.
- Farhadian, A., Rostami, M., & Nilchi, M. (2020). Compare Canonical stochastic volatility model of focal MSGJR-GARCH to measure the volatility of stock returns and calculating VaR. *Financial Management Perspective*, 10(32), 131-158. (In Persian)
- Gerlach, R., Lu, Z., & Huang, H. (2013). Exponentially Smoothing the Skewed Laplace Distribution for Value-at-Risk Forecasting. *Journal of Forecasting*, 32(6), 534-550.
- Hansen, B. E. (1994). Autoregressive conditional density estimation. *International Economic Review*, 705-730.
- Hou, Y., Li, S., & Wen, F. (2019). Time-varying volatility spillover between Chinese fuel oil and stock index futures markets based on a DCC-GARCH model with a semi-nonparametric approach. *Energy Economics*, 83, 119-143.
- Jarrow, R., & Rudd, A. (1982). Approximate option valuation for arbitrary stochastic processes. *Journal of financial Economics*, 10(3), 347-369.
- Jiménez, I., Mora-Valencia, A., & Perote, J. (2020). Risk quantification and validation for Bitcoin. *Operations Research Letters*, 48(4), 534-541.
- Jiménez, I., Mora-Valencia, A., & Perote, J. (2022a). Semi-nonparametric risk assessment with cryptocurrencies. *Research in International Business and Finance*, 59, 101567.

- Jiménez, I., Mora-Valencia, A., & Perote, J. (2022b). Has the interaction between skewness and kurtosis of asset returns information content for risk forecasting?. *Finance Research Letters*, 49, 103105.
- Jondeau, E., & Rockinger, M. (2001). Gram–charlier densities. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 25(10), 1457-1483.
- Jurczenko, E., Maillet, B., & Negréa, B. (2004). A note on skewness and kurtosis adjusted option pricing models under the martingale restriction. *Quantitative Finance*, 4(5), 479-488.
- Kendall, M. G. (1977). *The advanced theory of statistics*. (Vol. I). Griffin & Co, London (Ed. 4).
- Kiani, T., Farid, D., & Sadeghi, H. (2015). The Measurement of Risk based on the Criterion of Value at Risk via Model of GARCH (A Study of Stock of Listed Companies in Tehran Stock Exchange (TSE) in the Cement Industry). *Financial Management Strategy*, 3(3), 149-168. (In Persian)
- Kou, S., & Peng, X. (2014). Expected shortfall or median shortfall. *Journal of Financial Engineering*, 1(01), 1450007.
- Kou, S., Peng, X., & Heyde, C. C. (2013). External risk measures and Basel accords. *Mathematics of Operations Research*, 38(3), 393-417.
- Labit, B., Furno, I., Fasoli, A., Diallo, A., Müller, S. H., Plyushchev, G., ... & Poli, F. M. (2007). Universal statistical properties of drift-interchange turbulence in TORPEX plasmas. *Physical review letters*, 98(25), 255002.
- Lanne, M., & Pentti, S. (2007). Modeling conditional skewness in stock returns. *The European Journal of Finance*, 13(8), 691-704.
- León-Camacho, B., Mora-Valencia, A., & Perote, J. (2022). Modified variance incorporating high-order moments in risk measure with Gram-Charlier returns. *The Engineering Economist*, 67(3), 218-233.
- León, Á., & Níguez, T. M. (2020). Modeling asset returns under time-varying semi-nonparametric distributions. *Journal of Banking & Finance*, 118, 105870.
- León, Á., Mencía, J., & Sentana, E. (2009). Parametric properties of semi-nonparametric distributions, with applications to option valuation. *Journal of Business & Economic Statistics*, 27(2), 176-192.
- León, Á., Rubio, G., & Serna, G. (2005). Autoregressive conditional volatility, skewness and kurtosis. *The Quarterly Review of Economics and Finance*, 45(4-5), 599-618.

- Lin, W. (2023). *Essays in quantitative finance* (Doctoral dissertation, University of Otago).
- Lin, W., & Zhang, J. E. (2022). The valid regions of Gram–Charlier densities with high-order cumulants. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 407, 113945.
- Lin, C. H., Changchien, C. C., Kao, T. C., & Kao, W. S. (2014). High-order moments and extreme value approach for value-at-risk. *Journal of Empirical Finance*, 29, 421-434.
- Mandelbrot, B. B., & Mandelbrot, B. B. (1997). *The variation of certain speculative prices* (pp. 371-418). Springer New York.
- Mauleón, I., & Perote, J. (2000). Testing densities with financial data: an empirical comparison of the EdgeworthSargan density to the Students t. *The European Journal of Finance*, 6(2), 225-239.
- Mauleón, I. (2010). Assessing the value of Hermite densities for predictive distributions. *Journal of Forecasting*, 29(8), 689-714.
- Mehrasa, M., & Mohamadi, T. (2019). Extreme Value Theory and Value at Risk: Application to OPEC Market. *Iranian Energy Economics*, 8(31), 151-170. (In Persian)
- Modarresi, N., Peymani, M., & Darvishi, M. (2021). Estimation of Conditional Value at Risk under Stochastic Volatility Levy Processes for Tehran Stock Market. *Financial Management Perspective*, 11(34), 69-94. (In Persian)
- Mohammadian Amiri, E., & Ebrahimi, S. B. (2018). Multiple-Step-Ahead Forecasting of Value at Risk Based on Holt-Winters Exponential Smoothing Multiplicative Method. *Financial Management Strategy*, 6(1), 93-114. (In Persian)
- Namaki, A., Abbasian, E., & Shafiei, E. (2022). Analyzing of Systemic Risk Contributions of Tehran Stock Exchange Companies by Complexity Approach. *Financial Management Strategy*, 10(1), 91-112. (In Persian)
- Ñíguez, T. M., & Perote, J. (2012). Forecasting heavy-tailed densities with positive Edgeworth and Gram-Charlier expansions. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 74(4), 600-627.
- Phillips, P. C. (1977). A general theorem in the theory of asymptotic expansions as approximations to the finite sample distributions of econometric estimators. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 1517-1534.



- Sargan, J. D. (1975). Gram-Charlier approximations applied to t ratios of k-class estimators. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 327-346.
- Schlögl, E. (2013). Option pricing where the underlying assets follow a Gram/Charlier density of arbitrary order. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 37(3), 611-632.
- Shekarkhah, J., Bolu, G., & Haghightat, M. (2017). The Impact of Higher Moments and Nonsystematic Volatility on Future Stock Return using Fama-MacBeth Model. *Empirical Studies in Financial Accounting*, 14(56), 109-133. (In Persian)
- Talebi, R., Zanjirdar, M., & pour Fakharan, M. (2021). Analysis and explanation of stock returns based on third and fourth order torques of non-systematic risk and the role of arbitrage constraints and investors' limited attention to it. *Advances in Finance and Investment*, 2(3), 130-97. (In Persian)
- Theodossiou, P. (1998). Financial data and the skewed generalized t distribution. *Management Science*, 44(12-part-1), 1650-1661.
- Tehrani, R., Nabizade, A., & Bolguriyan, M. (2011). Examination of the effect of skewness and excess kurtosis on stock returns description through Capital Asset Pricing Model and Fama & French three factor model. *Commercial Strategies*, 9(47), 155-162. (In Persian)
- Torki, L., Esmaeli, N., & Haghparast, M. (2023). Comparison of GARCH Family Models in Estimating Value at Risk and Conditional Value at Risk on the Tehran Stock Exchange. *Quarterly Journal of Quantitative Economics*, 19(4), 43-78. (In Persian)
- Umar, Z., Usman, M., Choi, S. Y., & Rice, J. (2023). Diversification benefits of NFTs for conventional asset investors: Evidence from CoVaR with higher moments and optimal hedge ratios. *Research in International Business and Finance*, 65, 101957.
- Vacca, G., Zoia, M. G., & Bagnato, L. (2022). Forecasting in GARCH models with polynomially modified innovations. *International Journal of Forecasting*, 38(1), 117-141.
- Vacca, G., & Zoia, M. G. (2019). Kurtosis analysis in GARCH models with Gram-Charlier-like innovations. *Economics Letters*, 183, 108552.
- Wang, T., Liang, F., Huang, Z., & Yan, H. (2022). Do realized higher moments have information content?-VaR forecasting based on the realized GARCH-RSRK model. *Economic Modelling*, 109, 105781.

- Wu, P. T., & Shieh, S. J. (2007). Value-at-Risk analysis for long-term interest rate futures: Fat-tail and long memory in return innovations. *Journal of Empirical Finance*, 14(2), 248-259.
- Yan, J. (2005). Asymmetry, fat-tail, and autoregressive conditional density in financial return data with systems of frequency curves. *University of Iowa: Department of Statistics and Actuarial Science*.
- Zhu, D., & Galbraith, J. W. (2010). A generalized asymmetric Student-t distribution with application to financial econometrics. *Journal of Econometrics*, 157(2), 297-305.
- Zoia, M. G., Biffi, P., & Nicolussi, F. (2018). Value at risk and expected shortfall based on Gram-Charlier-like expansions. *Journal of Banking & Finance*, 93, 92-104.

---

#### استناد

فرزانگان، الهام (۱۴۰۳). بررسی محتوای اطلاعاتی چولگی و کشیدگی توزیع بازده TEPIX برای پیش‌بینی ریسک: مدل GARCH با بسط‌های گرام-چارلیر برای جملات اختلال. *چشم‌انداز مدیریت مالی*، ۱۴(۴۵)، ۱۴۹-۱۷۴.

---

#### Citation

Farzanegan, Elham (2024). Analyzing the Information Contained in the Skewness and Kurtosis of TEPIX Returns for Forecasting Risk: GARCH Model with Gram-Charlier Expansions for Innovations. *Journal of Financial Management Perspective*, 14(45) 149 - 174 (in Persian)

---