*Shahid Beheshti University*
*Journal of Financial Management Perspective*
No. 29, Spring 2020
PP:125 - 146

P-ISSN: 2645-4637
E-ISSN: 2645-4645

# Comparison of Value Risk Models and Coppola-CVaR in Portfolio Optimization in Tehran Stock Exchange

**Afsaneh Sina*, Mirfeiz Fallah****

**Abstract**

To optimize the investment portfolio, conditional value at risk is a new approach. To amend the non-normal distribution of return on assets, and the non-linear correlation between return, the modification of Copula-CVaR compound method has a better performance in measuring portfolio risk. In this study, it has been attempted to present a more efficient model for portfolio optimization that provides greater returns for investors, given the uncertainty investment conditions. The VaR model was compared variance-covariance approach and the Copula-CVaR model for their efficiency frontier. The research area entails of 2014 up 2018; The statistical population was the top 50 companies of TSE.The variance-covariance approach was used to estimate the VaR of the portfolio. Moreover to estimate the Copula-CVaR model we have used the ARIMA-GARCH time series disruption component of the asset return distribution; then the marginal distributions of the assets were estimated using the CAPA-Student function; finally through Monte Carlo simulation the return on assets and their CVaR for the 10-day period were calculated. The optimal portfolio composition was determined at 95% and 99% confidence levels for different levels of risk. The results of this study showed that the optimized portfolio formation using the compound model, the Copula-CVaR model, has performed better.

**Keywords: Optimal Stock Portfolio; Copula; Conditional Value at Risk;Copula-GARCH.**

---

Received: 2019.August.05, Accepted: 2019.November.16.

*Ph.D. Candidate in Financial Management, Islamic Azad University, Central Tehran Branch, Tehran, Iran.

**Associate prof, Department of Management, Central Tehran Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran (Corresponding author). E-mail: Mir.Fallahshams@iauctb.ac.ir

دانشگاه شهید بهشتی
نشریه چشم‌انداز مدیریت مالی
شماره ۲۹ ـ بهار ۱۳۹۹
ص‌ص ۱۴۶ـ۱۲۵

شاپای چاپی: ۴۶۳۷- ۲۶۴۵
شاپای الکترونیکی: ۴۶۴۵- ۲۶۴۵

# مقایسه عملکرد مدل‌های ارزش در معرض ریسک و کاپیولا- CVaR جهت بهینه سازی پرتفوی در بورس اوراق بهادار تهران

**افسانه سینا*، میرفیض فلاح****

## چکیده

یکی از رویکردهای جدید برای بهینه‌سازی پرتفوی سرمایه‌گذاری، استفاده از روش ارزش در معرض ریسک شرطی (CVaR) است. به دلیل نرمال نبودن توزیع بازده دارایی‌ها و غیرخطی بودن همبستگی بین بازده دارایی، استفاده از روش ترکیبی Copula-CVaR عملکرد بهتری در اندازه‌گیری ریسک پرتفوی دارایی‌ها دارد؛ در این پژوهش کوشیده شد تا مدلی کاراتر برای بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری ارائه شود که با در نظر داشتن شرایط عدم قطعیت سرمایه‌گذاری، بازدهی بیشتری را فراهم کند؛ به همین منظور مدل VaR با رویکرد واریانس-کوورایانس با مدل Copula-CVaR برای استخراج مرز کارا مقایسه شد. قلمرو زمانی پژوهش از سال ۱۳۹۳ تا ۱۳۹۷ و جامعه آماری نیز ۵۰ شرکت برتر «بورس اوراق بهادار تهران» بوده است. برای تخمین ارزش در معرض ریسک پرتفوی از رویکرد واریانس-کوواریانس استفاده شد. برای تخمین Copula-CVaR نیز ابتدا از طریق مدل ARIMA-GARCH سری زمانی جزء اخلال توزیع بازده دارایی‌ها برآورد و استاندارد شد؛ سپس توزیع‌های حاشیه‌ای دارایی‌ها با استفاده از تابع کاپیولا t-استیودنت برآورد شد. در گام آخر از طریق شبیه‌سازی مونت‌کارلو بازدهی دارایی‌ها شبیه‌سازی و مقدار CVaR آن‌ها برای دوره ۱۰ روزه محاسبه شد؛ سپس ترکیب بهینه پرتفوی در سطح اطمینان ۹۵ و ۹۹ درصد برای سطوح مختلف ریسک تعیین شد. نتایج این پژوهش حاکی از آن بود که تشکیل سبد سهام بهینه با استفاده از مدل ترکیبی یعنی مدل Capula-CVaR عملکرد بهتری داشته است.

**کلیدواژه‌ها: سبد سهام بهینه؛ کاپیولا؛ ارزش در معرض ریسک شرطی.**

---

تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۹۸/۰۵/۱۴، تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۸/۰۸/۲۵.

* دانشجوی دکتری مدیریت مالی، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تهران مرکز، تهران، ایران.

** دانشیار گروه مدیریت، واحد تهران مرکز، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران (نویسنده مسئول).

E-mail: Mir.Fallahshams@iauctb.ac.ir

## ۱. مقدمه

انتخاب سبد سهام بهینه[1] یکی از مسائلی است که از دیرباز ذهن متخصصان امور سرمایه‌گذاری را به خود مشغول کرده است؛ به عبارتی همه سرمایه‌گذاران درصدد هستند تا بتوانند با رعایت معیارهای مؤثر در تصمیم سرمایه‌گذاری و با توجه به ترجیحات شخصی خود، حتی‌الامکان به بهترین انتخاب‌های ممکن برسند. سرمایه‌گذارانی که نظریه نوین سبد سهام را پذیرفته‌اند و به کار می‌بندند، معتقدند که «حریف بازار» نیستند؛ بنابراین انواع گوناگونی از اوراق بهادار را نگهداری می‌کنند تا بازدهشان با متوسط بازده بازار برابر شود. ازآنجاکه آن‌ها توانایی پیش‌بینی ندارند، می‌کوشند «مجموعه‌ای متنوع» از اوراق بهادار نگهداری کنند تا بتوانند به نرخ بازدهی مطلوب خود دست یابند [۲۱].

مسئله اصلی هر سرمایه‌گذار تعیین مجموعه اوراق بهاداری است که مطلوبیت آنان را حداکثر سازد. این مسئله معادل انتخاب سبد سهام بهینه از مجموعه سبد سهام ممکن است. مدل میانگین– واریانس که توسط [۱۵] ارائه شد، یکی از مدل‌هایی است که به‌طور گسترده در مسئله انتخاب سبد سهام مورداستفاده قرار می‌گیرد. باید توجه داشت که هرچند این مدل ازلحاظ نظری با روش برنامه‌ریزی ریاضی قابل‌حل است، اما در عمل مشکلاتی در این زمینه وجود دارد. نخست اینکه معیار واریانس با در نظر گرفتن شرایط دنیای واقعی و سایر معیارهای ریسک نمی‌تواند چندان معیار مناسبی برای ریسک باشد. علاوه بر آن دیگر معیارهای ریسک، با توجه به ترجیحات سرمایه‌گذاران در دنیای واقعی، محدودیت‌هایی همچون اندازه سبد سهام را به مدل بهینه‌سازی خود می‌افزایند که چنین محدودیت‌هایی یک مسئله برنامه‌ریزی درجه دو–عدد صحیح را تشکیل می‌دهد که حل آن به‌مراتب مشکل‌تر از حل مدل اصلی است [۱۷] در تحلیل‌های فرا مدرن مدیریت پرتفوی، شواهد حاکی از این است که در بسیاری از مواقع توزیع بازده دارایی‌ها غیرنرمال و درعین‌حال روابط بین بازده دارایی‌ها نیز به‌صورت غیرخطی است؛ درحالی‌که در روش‌های مرسوم مدیریت پرتفوی، مانند روش حداقل واریانس ارائه‌شده توسط مارکویتز، فرض اساسی نرمال بودن توزیع بازده دارایی‌ها است. زمانی که توزیع بازده نرمال نیست، ضریب همبستگی خطی برای بیان ساختار وابستگی بین دارایی‌ها معیار مناسبی نیست و در این حالت استفاده از معیار کاپیولا[2] به‌عنوان معیار جایگزین برای مدل‌سازی ساختار وابستگی بین دارایی‌ها مناسب‌تر است. پژوهش‌های اخیر نشان داده است که استفاده از معیار ارزش در معرض خطر شرطی به‌عنوان معیار مناسبی از سنجش ریسک منسجم[3] مناسب‌تر است. [۸]

بر همین اساس، مسئله اصلی این پژوهش، ارائه مدلی برای بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری بر اساس مدل Copula-CVaR است؛ بنابراین در این پژوهش دو مدل بهینه‌سازی، یکی مدل

1. Selection Of Optimize Portfolio.
2. Copula.
3. Coherent Risk Measure.

بهینه‌سازی سبد سهام بر اساس ارزش در معرض ریسک و دیگری مدل بهینه‌سازی با رویکرد ارزش در معرض ریسک شرطی[1] با رویکرد کاپولا بررسی شد. در این پژوهش نویسندگان به دنبال آن هستند در حل مسئله بهینه‌سازی با در نظر گرفتن ملاحظات مدنظر سرمایه‌گذاران در انتخاب و تشکیل سبد سهام ضمن کاهش ریسک بازدهی سبد انتخابی را حداکثر کنند؛ همچنین درصدد هستند تا نشان دهند که استفاده از کدام مدل در بهینه‌سازی پرتفوی مناسب‌تر است؟

## ۲. مبانی نظری و پیشینه پژوهش

**نظریه مدرن سبد سهام.** اگر اوراق بهادار ریسک دار باشند، مسئله اصلی هر سرمایه‌گذار، تعیین سبدی از اوراق بهادار است که مطلوبیت آن حداکثر شود. این مسئله معادل انتخاب سبد سهام بهینه از مجموعه سبد سهام ممکن است که با عنوان «مسئله انتخاب سبد سهام» از آن یاد می‌شود. پیدایش نظریه مدرن سبد سهام[2] به سال ۱۹۵۲ بازمی‌گردد؛ یعنی زمانی که مارکویتز[3] [۱۵]، پژوهشی با عنوان «انتخاب سبد سهام» را منتشر کرد. رویکرد او برای انتخاب پرتفوی با این فرض شروع می‌شود که شخصی مقدار معینی پول برای سرمایه‌گذاری در اختیار دارد. این مبلغ برای یک مدت‌زمان مشخص که «دوره نگهداری سرمایه» نامیده می‌شود. سرمایه‌گذاری خواهد شد؛ سپس مبلغ موردنظر مصرف می‌شود و یا مجدداً سرمایه‌گذاری خواهد شد؛ بنابراین رویکرد مارکوتیز را می‌توان «رویکرد تک دوره‌ای» در سرمایه‌گذاری نامید که در آن آغاز دوره با $t=0$ و انتهای دوره با $t=1$ نمایش داده می‌شود. در $t=0$ سرمایه‌گذار باید تصمیم بگیرد کدام ورقه را خریداری و تا زمان $t=1$ نگهداری کند. مارکویتز بیان می‌کند که سرمایه‌گذاران به‌صورت هم‌زمان به دو پدیده ریسک و بازده توجه می‌کنند. ریسک با نوسانات بازده مرتبط است و نوسانات توسط واریانس بازده اندازه‌گیری می‌شود. مطابق نظریه مدرن سبد سهام، سرمایه‌گذاری که در پی حداکثر کردن بازده مورد انتظار و حداقل کردن عدم اطمینان یا ریسک است، دو هدف متضاد در پیش رو دارد که باید آن‌ها را با متنوع و تشکیل سبد سهام در برابر یکدیگر موازنه کند. از دیدگاه مارکویتز، تنوع‌بخشی شامل ترکیب اوراق با حداقل همبستگی مثبت به‌منظور کاهش ریسک در سبد سهام، بدون ازدست‌دادن بازده سبد سهام است. [۴]

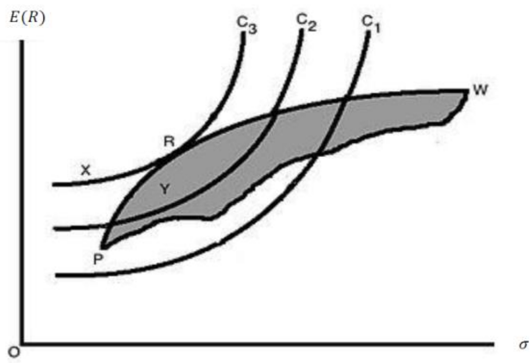
همان‌طور که در شکل ۱، ملاحظه می‌شود، ترکیب بهینه پرتفوی برای هر سرمایه‌گذار، نقطه‌ای روی مرز کارا است که با یکی از منحنی‌های بی‌تفاوتی آن مماس باشد.

---

۱ Conditional Value at Risk.

2. Modern Portfolio Theory (MPT)..

3. Mkowitz.




*شکل ۱. نمودار انتخاب پرتفوی بهینه سرمایه‌گذاری نوعی بر اساس منحنی بی‌تفاوتی سرمایه‌گذار*

در مدل مارکویتز هر سرمایه‌گذار می‌خواهد بازه مورد انتظار را که مطلوب است، در سطح «عدم اطمینان بازده» یا ریسک مشخص که نامطلوب است، حداکثر کند. معیارهای انتخاب بهینه سبد سهام در مدل مارکویتز، میانگین بازده دارایی‌ها به‌عنوان بازده مورد انتظار و واریانس بازده دارایی‌ها است. مدل کلی میانگین–واریانس مارکویتز برای یافتن مرز کارا به‌صورت رابطه ۱، است [۱۵].

$$\text{maximize } \mathrm{U} = \gamma \mathrm{E}(\mathrm{R_p}) + (1-\gamma)\sigma_{\mathrm{p}} \quad (۱)$$
$$st: \qquad \sum_{i=1}^{N} x_i = 1$$
$$0 \le \gamma \le 1$$

**ارزش در معرض ریسک شرطی.** ارزش در معرض ریسک یا همان VaR یک معیار اندازه‌گیری ریسک است که حداکثر زیان مورد انتظار را در یک موقعیت سرمایه‌گذاری خاص و برای سطح اطمینان خاصی تخمین می‌زند؛ به‌عبارت‌دیگر با سطح اطمینان α-1، VaR کوچک‌ترین عدد $\ell$ ی است؛ به‌طوری‌که احتمال ضرر $L$ از $\ell$ تجاوز کند، حداکثر برابر با $1-\alpha$ است [۱۴].
به‌عبارت‌دیگر خواهیم داشت:

$$\mathrm{VaR}_{\alpha} = \inf\left\{ \ell \in \mathbb{R} : \mathrm{P}(\mathrm{L} \ge \ell) \le 1-\alpha \right\} = \mathrm{F}^{-1}(\alpha) \quad (۲)$$

دو رویکرد عمده برای تقریب ارزش در معرض ریسک وجود دارد:
۱. رویکرد پارامتریک که شامل روش واریانس–کواریانس، روش تقریب کورنیش– فیشر[1] روش

1 . Cornish-Fisher estimate.

میانگین متحرک[1]، روش میانگین متحرک وزنی[2] و خانواده GARCH و غیره است (این روش دارای محدودیت‌ها مانند فرض نرمال بودن توزیع بازده دارد)

۲. رویکرد نا پارامتریک که شامل روش‌های شبیه‌سازی تاریخی و روش مونت‌کارلو است. اخیراً روش‌های نیمه پارامتریک نیز تبیین شده است که با استفاده از توزیع پارتو به روش‌های نظریه حدی مشهور هستند [۲].

از محدودیت‌های ارزش در معرض خطر می‌توان به در نظر نگرفتن خاصیت تنوع‌بخشی اشاره کرد. به این معنا که VaR پرتفوی از مجموع VaR دارایی‌های تشکیل‌دهنده آن پرتفوی بیشتر است؛ به‌بیان‌دیگر $\mathrm{VaR}(\mathrm{X+Y}) > \mathrm{VaR}(\mathrm{X})+\mathrm{VaR}(\mathrm{Y})$؛ بنابراین VaR به دلیل فقدان ویژگی جمع‌پذیری جزئی همیشه نمی‌تواند به‌عنوان یک شاخص ریسک منسجم مورداستفاده قرار گیرد (اگرچه هنوز به‌عنوان اندازه ریسک قابل‌قبول است). یکی از سنجه‌هایی که مشکل بالا را شامل نمی‌شود، ارزش در معرض ریسک شرطی است. این سنجه، میانگین ارزش‌های در معرض ریسک در سطح اطمینان تعیین‌شده یا به‌عبارت‌دیگر میانگین حداکثر زیان‌های انتظاری در یک سطح اطمینان تعیین‌شده را برآورد می‌کند. ارزش در معرض ریسک شرطی یک متغیر تصادفی X که نمایانگر زیان است [۱۱]، در سطح معناداری $\alpha$ به‌صورت زیر است

$$\mathrm{CVaR}_{\alpha}(\mathrm{X}) = \frac{1}{(1-\alpha)}\int_{\alpha}^{1}\mathrm{VaR}_{\beta}\, d\beta \qquad (۳)$$

که در آن $\beta \in [\alpha,1]$.

**کاپیولاها، انواع و روش‌های برآورد.** کاپیولا یک تکنیک ریاضی انعطاف‌پذیر است که مجموعه‌ای از توابع احتمال تجمعی حاشیه‌ای تک متغیره را به یکدیگر متصل کرده و یک تابع احتمال تجمعی چند متغیره را تولید می‌کند. درواقع کاپیولا مبتنی بر ارتباط و وابستگی غیرخطی بین متغیرها بوده و پیونددهنده توزیع توأم و توابع حاشیه‌ای است. استفاده از کاپیولاها مزایای فراوانی دارد، ازجمله اینکه کاپیولاها علاوه بر بیان وابستگی خطی، توانایی نشان دادن وابستگی را نیز دارند، همچنین این اجازه را می‌دهند که هر توزیع حاشیه‌ای برای هر متغیر انتخاب شود، در برابر تغییرات زیاد و سریع، ثابت هستند و با استفاده از آن‌ها می‌توان وابستگی را در هر دو طرف توزیع با استفاده از وابستگی دمی به دست آورد. نکته‌ای که محدودیتی برای کاپیولاهای ناپارامتریک محسوب می‌شود این است که پارامترها، محدودکننده شدت وابستگی متغیرها هستند و رابطه ریاضی معینی با آن دارند. بنا به استفاده از پارامترهای متفاوت در کاپیولاهای پارامتریک مختلف، نتایج نیز باهم متفاوت خواهند بود.

کاپیولاها انواع گوناگونی دارند که به‌طورکلی در دودسته پارامتریک و ناپارامتریک تقسیم‌بندی

1. Moving average.
2. Weighted Moving average.

می‌شوند. ارجحیت کاپیولاهای پارامتریک در استفاده از پارامتر است؛ ازاین‌رو در این پژوهش موردتوجه قرارگرفته‌اند. درواقع برازش کاپیولا با داده‌های ورودی به کمک تخمین این پارامترها امکان‌پذیر است. از انواع کاپیولاها می‌توان به کاپیولای گاوسی و تی کاپیولا و نیز خانواده کاپیولای ارشمیدسی که شامل کاپیولاهای کلایتون، گامبل و فرانک است، اشاره کرد که تابع توزیع آن‌ها در جدول ۱، ارائه‌شده است [۱۶].

*جدول ۱. برخی کاپیولاهای معروف به همراه تابع توزیع و مولد آن‌ها*

| نام کاپیولا | تابع توزیع کاپیولا |
|---|---|
| کلایتون | $C_C(u_1,u_2)=\left[\max\left\{u_1^{-\theta}+u_2^{-\theta}-1,0\right\}\right]^{-\frac{1}{\theta}},\quad \theta\in[-1,\infty)\setminus\{0\}$ |
| گامبل | $C_G(u_1,u_2)=\exp\left[-\left(\left(-\log(u_1)\right)^{\theta}+\left(-\log(u_2)\right)^{\theta}\right)^{-\frac{1}{\theta}}\right],\quad \theta\in[1,\infty)$ |
| فرانک | $C_F(u_1,u_2)=-\frac{1}{\theta}\ln\left(1+\frac{\left(e^{-\theta u_1}-1\right)\left(e^{-\theta u_2}-1\right)}{e^{-\theta}-1}\right),\quad \theta\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ |
| گاوسی | $C_{Ga}(u)=\int_{-\infty}^{\phi^{-1}(u_1)}\cdots\int_{-\infty}^{\phi^{-1}(u_n)}\frac{1}{2\pi^{\frac{\pi}{2}}\lvert\mathbf{R}\rvert}\exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{x}\right)dx_1\cdots dx_n$ |
| تی | $C_T=\lvert\mathbf{R}\rvert^{-\frac{1}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}\right)^{n}\frac{\left(1+\frac{1}{\nu}\boldsymbol{\delta}^T\mathbf{R}^{-1}\boldsymbol{\delta}\right)^{-\frac{\nu+n}{2}}}{\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{\delta_i^2}{v}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}}$ |

فرض کنید $(x_i,y_i)$ و $(x_j,y_j)$ دو مشـــاهده از زوج بردارهای $(X,Y)$ از متغیرهای تصادفی باشد. $(x_i,y_i)$ و $(x_j,y_j)$ بر هم منطبق هستند، هرگاه $x_i<x_j$ و $y_i<y_j$ و یا هرگاه $x_i>x_j$ و $y_i>y_j$. به‌طور مشـــابه $(x_i,y_i)$ و $(x_j,y_j)$ بر هم منطبق نیســـتند، هرگاه $x_i<x_j$ و $y_i>y_j$ و یا $x_i>x_j$ و $y_i<y_j$. توجه شـــود که فرمول‌های متناظر می‌توانند بدین‌صـــورت داده شـــوند که $(x_i,y_i)$ و $(x_j,y_j)$ بر هم منطبق هســـتند، هرگاه $0<(x_i-x_j)(y_i-y_j)$ و بر هم منطبق نیستند، هرگاه $(x_i-x_j)(y_i-y_j)<0$.

از مشهورترین سنجه‌های مقیاس بدون تغییر می‌توان به تای کندال[1] و رو اسپیرمن[2] اشاره کرد که درواقع اندازه‌های استقلال هستند [۷].

1. Kendall rank correlation coefficient.
2. Spearman's rank correlation coefficient.

**الف) تاو کندال.** اگر $\left(X_1,Y_1\right)$ و $\left(X_2,Y_2\right)$ بردارهایی از متغیرهای تصادفی مستقل و یکسان توزیع‌شده توسط تابع توزیع تجمعی $H$ باشد، آنگاه تاو کندال به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tau=\tau_{XY}=P\left(\left(X_1-X_2\right)\left(Y_1-Y_2\right)>0\right)-P\left(\left(X_1-X_2\right)\left(Y_1-Y_2\right)<0\right) \qquad (۴)$$

**ب) رو اسپیرمن.** سه بردار تصادفی مستقل $\left(X_1,Y_1\right)$، $\left(X_2,Y_2\right)$ و $\left(X_3,Y_3\right)$ با تابع توزیع تجمعی مشترک $H$ و کاپیولای $C$ مفروض است. رو اسپیرمن به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\rho_{XY}=3\left(P\left(\left(X_1-X_2\right)\left(Y_1-Y_3\right)>0\right)-P\left(\left(X_1-X_2\right)\left(Y_1-Y_3\right)<0\right)\right) \qquad (۵)$$

برای برآورد کاپیولاها، دو راه عمده وجود دارد: نخست، روش حداکثر درستنمایی و دوم، روش استنتاج حاشیه‌ها. فرض کنید $\mathrm{X}_1,....,\mathrm{X}_\mathrm{n}$ متغیرهای تصادفی با توابع توزیع $\mathrm{F}_1,....,\mathrm{F}_\mathrm{n}$ باشند و پارامترهای مربوط به این توزیع‌ها به ترتیب $\alpha_1,....,\alpha_\mathrm{n}$ بوده و دارای تابع توزیع توأم $\mathrm{F}$ باشند، آنگاه با توجه به قضیه اسکلار داریم:

$$\mathrm{F}\left(\mathrm{x}_1,....,\mathrm{x}_\mathrm{n}\left|\alpha_1,....,\alpha_n,\theta\right.\right)=\mathrm{C}\left(\mathrm{F}_1\left(\mathrm{x}_1\right),....,\mathrm{F}_\mathrm{n}\left(\mathrm{x}_\mathrm{n}\right)\right) \qquad (۶)$$

که در آن $\mathrm{C}$ تابع کاپیولا با پارامتر $\theta$ است. تابع چگالی توأم $\mathrm{X}_1,....,\mathrm{X}_\mathrm{n}$ به‌صورت معادله ۷، است:

$$\mathrm{f}\left(\mathrm{x}_1,....\mathrm{x}_\mathrm{n}\left|\alpha_1,....,\alpha_\mathrm{n};\theta\right.\right)=\mathrm{c}\left(\mathrm{F}_1\left(\mathrm{x}_1;\alpha_1\right),....,\mathrm{F}_\mathrm{n}\left(\mathrm{x}_\mathrm{n};\alpha_\mathrm{n}\right);\theta\right)\prod_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}\mathrm{f}_\mathrm{i}\left(\mathrm{x}_\mathrm{i};\alpha_i\right) \qquad (۷)$$

$\mathrm{c}$ تابع چگالی تابع کاپیولای $\mathrm{C}$ است؛ بنابراین تابع راست نمایی به‌صورت معادله ۸، است:

$$\mathrm{I}\left(\alpha,...,\alpha;\theta\right)=\prod_{\mathrm{t}=1}^{\mathrm{n}}\left(\mathrm{c}\left(\mathrm{F}\left(\mathrm{x}_1;\alpha_1\right),....,\mathrm{F}_\mathrm{n}\left(\mathrm{x}_\mathrm{n};\alpha_\mathrm{n}\right);\theta\right)\right)\prod_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}\mathrm{f}_i\left(\mathrm{x}_\mathrm{i};\alpha_\mathrm{i}\right) \qquad (۸)$$

مشتق عبارت بالا نسبت به هر یک از پارامترهای $\alpha_1,....,\alpha_\mathrm{n}$ و $\theta$ گرفته‌شده و با متحد قرار دادن روابط حاصل با صفر پارامترها برآورد می‌شود. روش حداکثر درستنمایی به محاسبات زیادی، به‌خصوص در مواردی که ابعاد زیاد باشد، نیاز دارد؛ زیرا در این روش باید به‌طور هم‌زمان پارامترهای توزیع‌های حاشیه‌ای و پارامتر وابستگی نشان داده‌شده به‌وسیله تابع کاپیولا برآورد شوند؛ ازاین‌رو برای برآورد این مجموعه از پارامترها روش دومرحله‌ای پیشنهاد می‌شود. در مرحله

نخست، پارامترهای حاشیه $(\theta_1)$ با اجرای برآورد برای توزیع‌های حاشیه‌ای تک متغیره برآورد می‌شود:

$$\hat{\theta}=\text{Arg}\ \ \text{Max}_{\theta_1}\sum_{t=1}^{N}\sum_{j=1}^{n}\text{In}\, f_j\left(x_{jt};\theta_1\right) \qquad (۹)$$

در دومین گام با فرض $\hat{\theta}_1$ پارامترهای تابع کاپیولا برآورد می‌شود:

$$\hat{\theta}_2=\text{Arg}\ \ \text{Max}_{\theta_1}\sum_{t=1}^{N}\ln c\left(F_1\left(x_{1t}\right),....,F_n\left(x_{nt}\right)\right) \qquad (۱۰)$$

این روش، «استنتاج برای حاشیه‌ها» نامیده می‌شود.

**کاپیولای t– استیودنت.** با توجه به اینکه در این پژوهش از کاپیولای t- استیودنت استفاده‌شده است؛ در این بخش این روش به‌طور کامل توضیح داده خواهد شد. تابع کاپیولای t– استیودنت n بعدی نیز همانند کاپیولای نرمال از یک تابع توزیع چند متغیره به دست می‌آید. کاپیولای t– استیودنت به‌صورت رابطه ۱۱، نمایش داده می‌شود [۳]

$$C_v(u_1.\ldots.u_n;\Sigma)=t_v\left(t_v^{-1}(u_1).\ldots.t_v^{-1}(u_n)\right) \qquad (۱۱)$$

که در اینجا $t_v$ و $t_v$ به ترتیب تابع توزیع t– استیودنت چند متغیره و تابع توزیع t – استیودنت تک متغیره با درجه آزادی $v$ هستند. مان؛ کاپیولای نرمال در اینجا نیز $\Sigma$ ماتریس همبستگی است. کاپیولای t–استیودنت را نیز نمی‌توان به‌صورت یک فرم دقیق نمایش داد. در اینجا از چگالی t– استیودنت چند متغیره[۲]کمک گرفته می‌شود. تابع چگالی t– استیودنت چند متغیره به‌صورت رابطه ۱۲، است:

$$f(X)=k|\Sigma|^{-\frac{1}{2}}\left(1+v^{-1}\acute{X}\Sigma^{-1}X\right)^{-\frac{(v+n)}{2}}$$
$$(۱۲)\quad k=\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)^{-1}\Gamma\left(\frac{v+n}{2}\right)(v\pi)^{-\frac{n}{2}}$$

بنابراین تابع کاپیولا t– استیودنت nمتغیره از رابطه ۱۳، به دست می‌آید:
(۱۳)

1. Index Flow Method.
2. Multivariate student t density function.

$$C_v(u_1.\ldots.u_n;\Sigma)=\int_0^{t_v{}^{-1}(u_1)}\int_0^{t_v{}^{-1}(u_n)}k|\Sigma|^{-\frac{1}{2}}\left(1+v^{-1}\acute{X}\Sigma^{-1}X\right)^{-\frac{(v+n)}{2}}dx_1\ldots dx_n$$

اگر از معادله ۱۳، مشتق گرفته شود، تابع چگالی کاپیولای t– استیودنت به دست می‌آید که این تابع به‌صورت رابطه ۱۴، نشان داده می‌شود:

(۱۴)

$$C_v(u_1.\ldots.u_n;\Sigma)=k|\Sigma|^{-\frac{1}{2}}\left(1+v^{-1}\acute{\xi}\Sigma^{-1}\xi\right)^{-\frac{(v+n)}{2}}\prod_{i=1}^{n}\left(1+v^{-1}\xi_i^2\right)^{\frac{(v+1)}{2}}$$

$$\xi=\left(t_v^{-1}(u_1).\ldots.t_v^{-1}(u_n)\right)$$

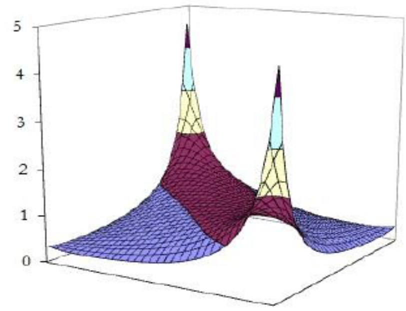
$$K=\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)^{n-1}\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)^{-n}\Gamma\left(\frac{\mathrm{v}+\mathrm{n}}{2}\right)$$

اگر تنها دو متغیر تصادفی وجود داشته باشد، تابع کاپیولای t–استیودنت و تابع چگالی کاپیولای t– استیودنت به‌صورت رابطه ۱۵، نمایش داده می‌شوند:

(۱۵)

$$C(u_1.u_2;\varrho)=\int_0^{\Phi^{-1}(u_1)}\int_0^{\Phi^{-1}(u_2)}(2\pi)^{-1}(1-\varrho^2)^{-\frac{1}{2}}[1+v^{-1}(x_1^1-2\varrho x_1x_2+x_2^2)]^{-\frac{(v+2)}{2}}dx_1dx_2$$

$$C(u_1,u_2;\varrho)=\mathrm{K}(1-\varrho^2)^{-\frac{1}{2}}[1+v^{-1}(1-\varrho^2)^{-1}(\xi_1^2-2\varrho\xi_1\xi_2+\xi_2^2)]^{-\frac{(v+2)}{2}}\times[(1+v^{-1}\xi_1^2)(1+v^{-1}\xi_2^2)]^{-\frac{(v+2)}{2}}$$




*شکل ۱. تابع چگالی کاپیولای t– استیودنت با $\varrho=0.5$ و $d=4$*

نکته قابل‌توجه در شکل بالا این است که ارتفاع کناره‌ها در این کاپیولا باهم برابر هستند؛ زیرا این کاپیولا متقارن است؛ همچنین ارتفاع کناره‌ها از کاپیولای نرمال بیشتر است؛ یعنی این کاپیولا

دارای وابستگی دنباله‌ای بیشتر از کاپیولای نرمال است؛ البته تمامی کاپیولاهای t– استیودنت دارای وابستگی متقارن نیستند و انواع مختلفی از توابع کاپیولای t– استیودنت با وابستگی نامتقارن وجود دارد.

**پیشینه پژوهش.** نیکو مرام و همکاران [۱۸]، یک مدل بهینه‌سازی پرتفوی بر اساس ریسک نامطلوب و ظرفیت مطلوب و عوامل روان‌شناختی ارائه کردند. آن‌ها به بررسی بازده ۱۸ صنعت از صنایع پذیرفته‌شده در «بورس اوراق بهادار تهران» در بازه دوازده‌ساله پرداختند. نتایج پژوهش نشان داد که بازده پرتفوی بهینه مبتنی بر ریسک نامطلوب و ظرفیت مطلوب در حالتی که سرمایه‌گذار از ریسک نامطلوب گریزان و از ظرفیت مطلوب نیز گریزان است و یا زمانی که سرمایه‌گذار از ریسک نامطلوب گریزان و نسبت به ظرفیت مطلوب بی‌تفاوت (خنثی) است، تفاوت معناداری با بازده مدل کلاسیک ندارند؛ درحالی‌که بازده پرتفوی بهینه در حالتی که سرمایه‌گذار از ریسک نامطلوب گریزان و در جست‌وجوی ظرفیت مطلوب (پتانسیل پذیر) است از بازده مدل کلاسیک بالاتر است.

صالح‌آبادی و همکاران [۲۳]، به ارائه مدل LMP-Upm در سطوح مختلف ریسک و ظرفیت پذیری با استفاده از شاخص‌های تمام صنایع برای بهینه‌سازی پرتفوی پرداختند. دوره زمانی بهینه‌سازی از سال ۱۳۸۹ تا ۱۳۹۲ در نظر گرفته‌شده است و دوره پس‌ازآن (۱۳۹۲ تا ۱۳۹۵) روند پرتفوی بهینه‌شده با مدل میانگین–واریانس مقایسه شد و عملکرد با استفاده از نسبت شارپ مقایسه شد. نتایج پژوهش نشان داد که مرز کارای مدل LMP-Upm عملکرد بهتری دارد.

رهنمای رودپشتی و همکاران [۲۱]، یک مدل بهینه‌سازی پرتفوی بر اساس نسبت شارپ پایدار در «بورس اوراق بهادار تهران» ارائه کردند. نتایج این پژوهش حاکی از آن است که بازده واقعی در مدل شارپ تفاوت معناداری با مدل مارکویتز ندارد.

پویان‌فر و موسوی [۱۶]، با ترکیب نظریه ارزش فرین[1] و کاپیولاها، ارزش در معرض ریسک سبدی متشکل از سه نماد با بالاترین نقد شوندگی در صنعت پتروشیمی «بورس اوراق بهادار تهران» را اندازه‌گیری کردند. نتایج حاصل با مدل‌های دیگر مقایسه شد و نشان داده شد که مدل ترکیبی نسبت به مدل‌های شبیه‌سازی تاریخی، پارامتریک و مدل ترکیبی واریانس ناهمسان شرطی تعمیم‌یافته کارآمدتر است.

فلاح‌پور و باغبان [۸]، برای بهینه‌سازی پرتفویی از دو فلز طلا و مس از مدل کاپیولا - CVaR و روش Mean-CVaR استفاده و این دو مدل را باهم مقایسه کردند. آن‌ها از داده‌های هفتگی قیمت دو فلز طلا و مس طی سال‌های ۲۰۰۲ تا ۲۰۱۳ برای یافتن ترکیب بهینه این دارایی‌ها

1. Extreme Value Theory.

استفاده کردند. نتایج پژوهش نشان داد که استفاده از روش Copula-CVaR، عملکرد بهتری برای استخراج مرز کارا خواهد داشت.

نیکوسخن [۱۹]، از مدل‌های GJR-copula-CVaR برای بهینه‌سازی پرتفوی متشکل از شاخص بورس تهران و شاخص بورس استانبول در بازه زمانی سال‌های ۲۰۰۸ تا ۲۰۱۵ استفاده کرد. یافته‌های پژوهش وی نشان داد که در بین مدل‌های کاپیولا، مدل کاپیولا t- استیودنت نسبت به سایر مدل‌های کاپیولا عملکرد بهتری دارد.

فرناندز و گومز [۱۰]، مدلی درزمینهٔ انتخاب سبد سهام با بازده‌های فازی ارائه کردند. در مدل آن‌ها از دو رویکرد بهینه‌سازی تصادفی و رویکرد فازی استفاده شد. مدل ارائه‌شده توسط آن‌ها یک مدل غیرخطی است. مدل ارائه‌شده ابتدا توسط رویکرد محدودیت تصادفی به یک مدل معادل قطعی تبدیل شد؛ سپس مدل که دارای آرمان‌های فازی است با استفاده از رویکردهای رایج به‌صورت قطعی تبدیل شد.

برمودز و گومز [۵]، از یک الگوریتم ژنتیک برای حل مدل میانگین–نیم‌واریانس پرتفوی با بهره‌گیری از منطق فازی و وجود محدودیت کاردینالیتی استفاده کردند و در آن برای در نظر گرفتن عدم قطعیت داده‌ها از اعداد فازی ذوزنقه‌ای بهره گرفتند. گوپتا و همکاران [۱۲]، یک مدل چند معیاره فازی انتخاب سبد سرمایه‌گذاری با بیشینه‌سازی بازده و نقد شوندگی و در نظر گرفتن ریسک به‌صورت فازی و به‌عنوان محدودیت ارائه دادند. در این مدل بودجه، محدودیت‌های کاردینالیتی و حد بالا و پایین برای سرمایه‌گذاری در هر سهم در نظر گرفته‌شده است که با یک الگوریتم هیبریدی که شبیه‌سازی فازی را با الگوریتم ژنتیک ترکیب کرده است، حل‌شده است.

پونال [۲۰]، با استفاده از ارزش در معرض ریسک و با فرض حداکثر سازی مطلوبیت انتظاری، اقدام به‌گزینش سبد سهام بهینه برای یک دارایی ریسکی و یک دارایی غیر ریسکی در دو سناریو از دو سطح مختلف میانگین و انحراف معیار قیمت‌ها کرده است. نتایج این مطالعه نشان داد که در شرایط عدم اعمال محدودیت شاخص VaR، همواره سهم ثابتی از ارزش سبد سهام به دارایی ریسکی اختصاص داده می‌شود؛ بااین‌حال در صورت اعمال شاخص VaR، با طولانی‌تر شدن دوره سرمایه‌گذاری، حداکثر مقدار سرمایه‌گذاری برای دارایی های ریسکی در سطح پایین‌تری از ارزش سبد سهام انجام می‌گیرد؛ به‌عبارت‌دیگر با افزایش طول دوره سرمایه‌گذاری، احتمال اینکه میزان کاهش ارزش سبد سهام از سطح مجاز VaR بیشتر شود، افزایش می‌یابد؛ بنابراین در شرایط سرمایه‌گذاری‌های بلندمدت در سطوح بالای ارزش سبد سهام باید سرمایه‌گذاری کمتری در دارایی‌های ریسکی انجام گیرد.

گوپتا و همکاران [۱۲]، یک مدل چند معیاره فازی انتخاب سبد سرمایه‌گذاری با بیشینه‌سازی بازده و نقد شوندگی و در نظر گرفتن ریسک به‌صورت فازی و به‌عنوان محدودیت ارائه کردند. در این مدل بودجه، محدودیت‌های کاردینالیتی و حد بالا و پایین برای سرمایه‌گذاری در هر سهم در

نظر گرفته‌شده است و با یک الگوریتم هیبریدی که شبیه‌سازی فازی را با الگوریتم ژنتیک ترکیب کرده است، حل‌شده است. چن و همکاران [۶]، از روش برنامه‌ریزی خطی فازی ترکیب بهینه پرتفوی را در «بورس شانگهای» استخراج کردند. آن‌ها معیارهای بازده و ریسک را با اعداد فازی ذوزنقه‌ای تعریف کرده و مدلی چندهدفه ارائه کردند. آن‌ها با تعریف مدل احتمالی، مسئله را قبل از حل، از حالت فازی خارج کرده و به روش برنامه‌ریزی فازی حل کردند.

سهام خدام و همکاران [۲۲]، مدل GARCH-EVT-COPULA را با مدل GARCH-EVT برای بهینه‌سازی پرتفوی متشکل از ۱۰ شاخص اصلی بورس‌های جهانی از قبیل بورس نیویورک، توکیو و لندن باهم مقایسه کردند. یافته‌های پژوهش آن‌ها نشان‌دهنده این است که مدل ترکیبی GARCH-EVT-COPULA عملکرد بهتری داشته است.

## ۳. چارچوب نظری

**مدل ارزش در معرض ریسک در بهینه‌سازی پرتفوی.** در اینجا رویکرد واریانس-کواریانس[۱] که شناخته‌شده‌ترین رویکرد برای تخمین VaR است نشان داده می‌شود. این روش برای نخستین بار توسط «مؤسسه جی پی مورگان»[۲] توضیح داده شد. تحت این رویکرد، VaR برای موقعیت‌های فردی و پرتفوی را می‌توان به‌راحتی با برآورد واریانس و کوواریانس بازدهی لگاریتمی عوامل ریسک و حساسیت پرتفوی به آن عوامل ریسک به دست آورد. اساسی‌ترین فرض در مدل این است که بازدهی لگاریتمی عوامل ریسک به‌طور مستقل و یکسان[۳] (i. i. d) با توزیع نرمال چند متغیره توزیع شوند. فرض کنید یک پرتفولیو متشکل از n دارایی با بازده‌های لگاریتمی دارایی i به‌عنوان $r_i$ و وزن‌های Wi داشته باشیم، بازدهی مورد انتظار پرتفوی $E(R_p)$ واریانس $\sigma_P^2$ در زمان t به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\mu = E(R_P) = \sum_{i=1}^{n} W_i . E(r_i) \tag{۱۶}$$

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i . w_j . \sigma_{ij} \tag{۱۷}$$

با فرض اینکه X به‌طور نرمال $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ توزیع‌شده و با استفاده از خاصیت بیضوی بودن توزیع نرمال (1)، داریم، $X = \mu \mp \sigma Z$ مقدار Z دارای توزیع نرمال استاندارد با میانگین صفر و انحراف معیار یک خواهد بود.

---

۱ Variance – Covariance approach..

2.J PMorgan .

3. Independent and identically distributed).

بنابراین بر اساس روش واریانس – کوواریانس و با فرض نرمال بودن توزیع بازدهی پرتفوی، مقدار ارزش در معرض ریسک پرتفوی به‌صورت رابطه ۱۸، محاسبه خواهد شد:

$$VaR_\alpha = -\mu + \sigma\Phi^{-1}_{(1-\alpha)} \qquad (۱۸)$$

در اینجا $\Phi^{-1}$ تابع توزیع معکوس Z است. مزیت مدل واریانس– کوواریانس سادگی آن است. اگر فرض نرمال بودن برقرار باشد، محاسبه VaR نسبتاً آسان است؛ چراکه ویژگی‌های ریاضی استاندارد توزیع نرمال می‌تواند برای محاسبه VaR در سطوح مختلف مورداستفاده قرار گیرد.

مدل بهینه‌سازی پرتفوی با رویکرد VaR به‌صورت رابطه ۱۹، است:

$$\begin{aligned} &\min \mathrm{VaR}_{\alpha,t} = -\mu_p\, dt + \sigma_p . \Phi^{-1}_{(1-\alpha).}\sqrt{dt} \\ &\text{s.t} \sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \\ &\sum_{i=1}^{n} w_i E(r_i) = E(R_p^*) \end{aligned} \qquad (۱۹)$$

**مدل کاپیولا-CVaR در بهینه‌سازی پرتفوی.** برای تخمین CVaR با استفاده از مدل Copula-ARIMA-GARCH ابتدا باید برای هر توزیع حاشیه‌ای یک مدل تخمین زده شود. مدل‌هایی که برای تخمین توزیع حاشیه‌ای بازده سهام شرکت‌ها استفاده می‌شوند از مدل‌های میانگین–واریانس شرطی یا مدل GARCH هستند. روش انجام کار به این صورت است که با استفاده از مدل‌های ARIMA-GARCH ابتدا برای هر یک از توزیع‌های حاشیه‌ای یک مدل برآورد می‌شود. پس از برآورد مدل‌ها، اجزای اخلال مدل استاندارد می‌شود. اگر سری زمانی اجزای اخلال استانداردشده توزیع‌های حاشیه‌ای به‌صورت $\{\eta_i, \eta_j, \eta_k, \eta_l\}$ نمایش داده شود، با تبدیل کردن آن‌ها به $u_i=F(\eta_i)$،$u_j=F(\eta_j)$، $u_k=F(\eta_k)$ و $u_l=F(\eta_l)$ توزیع کاپولا t- استیودنت استخراج می‌شود؛ سپس از طریق روش حداکثر درستنمایی، پارامترهای تابع کاپیولا برآورد می‌شود. در گام آخر با استفاده از الگوریتم شبیه‌سازی مونت‌کارلو، برای هر یک از توزیع‌های حاشیه‌ای با استفاده از توابع کاپیولا t- استیودنت ۱۰۰۰۰ بازدهی شبیه‌سازی می‌شود و سپس بر اساس بازده‌های شبیه‌سازی‌شده مقدار CVaR هر یک از دارایی‌های سبد محاسبه‌شده و از طریق مدل زیر بهینه‌سازی پرتفوی و استخراج مرز کارای بازار استخراج می‌شود:

$$\begin{aligned} &\min \quad CVaR_{\alpha,t} \\ &\text{s.t} \quad \sum_{i=1}^{n} w_i . E(r_i) \\ &\sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \\ &w_i > 0 \end{aligned} \qquad (۲۰)$$

فرضـیه ما در این پژوهش این اسـت که انتخاب سـبد سـهام بهینه بر اسـاس مدل Copula-CVaR عملکرد بهتری از مدل ارزش در معرض ریسک نرمال خواهد داشت.

## ۳. روش‌شناسی

این پژوهش، توصیفی از نوع تحلیل همبستگی است. جامعه آماری شامل ۵۰ شرکت برتر بورس است. نمونه‌گیری به روش برش مقطعی صورت گرفت. داده‌های روزانه بازدهی این شرکت‌ها طی دوره زمانی ابتدای سال ۱۳۹۳ تا پایان سال ۱۳۹۷ (حدود ۱۲۰۰ روز کاری) بررسی شد. برای انجام این پژوهش، مراحل زیر انجام‌شده است:

۱. تعیین قلمرو زمانی پژوهش و محاسبه بازدهی سهام شرکت‌های منتخب و تعیین سری زمانی بازدهی‌ها آن‌ها؛

۲. برازش یک مدل مناسب سری زمانی به روش باکس- جنکینز؛[1]

۳. برازش مدل مناسب برای واریانس ناهمسانی شرطی از طریق مدل‌های گارچ[2] برای هر یک از دارایی‌های سبد؛

۴. استفاده از مدل کاپیولای t- استیودنت برای برقراری روابط نوسانات بین بازدهی دارایی‌های سبد و تعیین توزیع حاشیه‌ای؛

۵. محاسبه ارزش در معرض ریسک و ارزش در معرض ریسک شرطی ۱۰روزه با اطمینان ۹۵ و ۹۹ درصد با استفاده از روش واریانس-کوواریانس و کاپیولا-گارچ برای دوره‌های زمانی روزانه؛

۶. آزمون اعتبار و دقت هر یک از مدل‌ها و انتخاب مدل مناسب و استخراج مرز کارا برای هر یک از مدل‌ها و مقایسه عملکرد آن‌ها با شاخص عملکرد شارپ.

## ٤. تجزیه و تحلیل داده ها

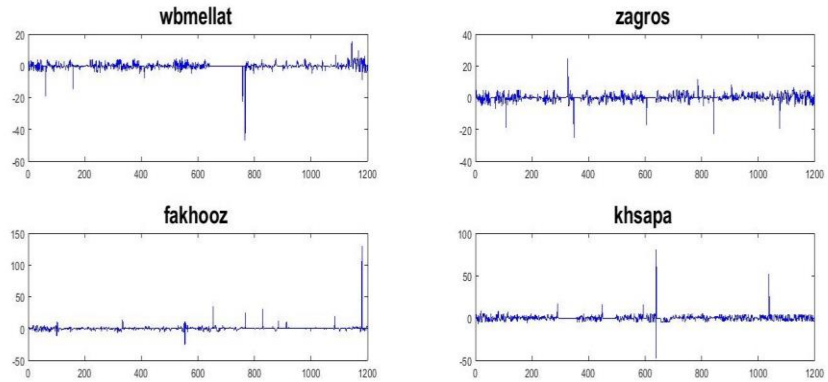
ابتدا بر اساس سری زمانی قیمت روزانه سهام شرکت‌های منتخب در یک بازه زمانی پنج‌ساله بین ابتدای سال ۱۳۹۳ تا پایان سال ۱۳۹۷، سری زمانی بازده روزانه سهام شرکت‌ها طبق فرمول زیر محاسبه شد:

$$X_t = \left(\ln P_t - \ln P_{t-1}\right) \times 100 \qquad (۲۳)$$

1 . Box-Jenkins Models.

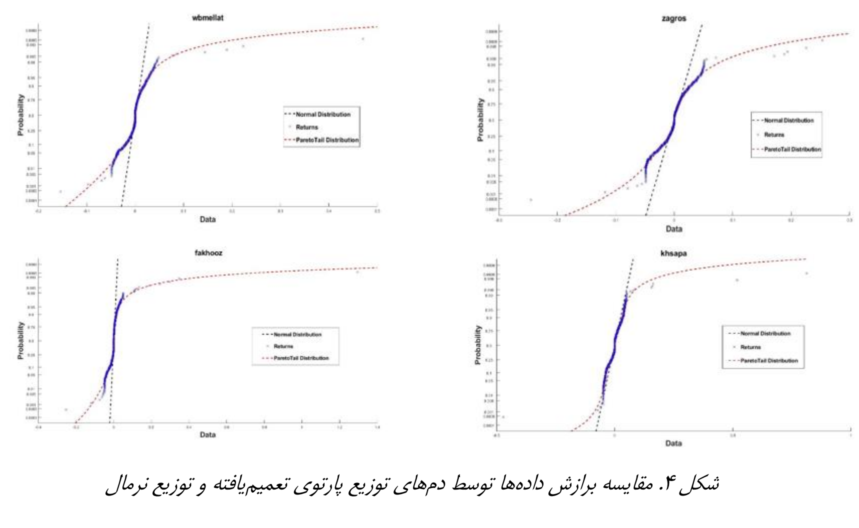
2 . Garch Models.

در رابطه ۲۳، $P_t$ قیمت سهم در زمان روز $t$ام است. در شکل ۳، نمودار نوسانات بازدهی سهام برخی از شرکت‌های نمونه ترسیم‌شده است. تغییرات بازدهی در شهریور و مهرماه سال ۱۳۹۷ به علت رشد فزاینده قیمت سهام در بازار بورس مشهود است.



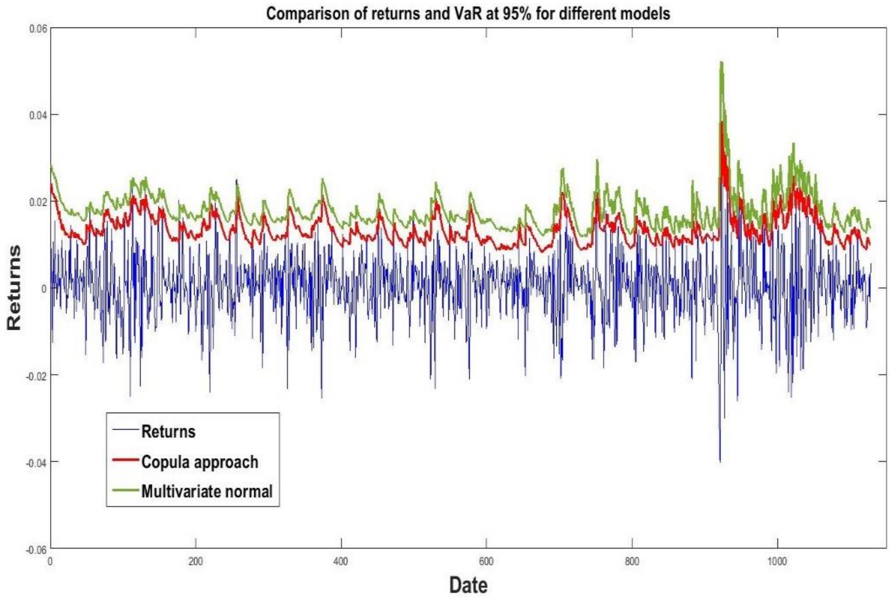

*شکل ۳. نوسانات بازدهی روزانه سهام برخی از شرکت‌های منتخب*

نمودار بازدهی سهام، نمودار توزیع نرمال و تابع احتمال پارتوی تعمیم‌یافته در شکل ۴، ترسیم‌شده است. اگر نمودار بازدهی خطی باشد، توزیع نرمال دارای برازش خوبی است؛ در غیر این صورت باید خانواده‌های پارامتریک، مثل توزیع t را در نظر گرفت. در شکل ۴، ملاحظه می‌شود که دنباله‌ها به‌طور کامل توسط توزیع نرمال مدل‌سازی نمی‌شوند و استفاده از روش توزیع t اجتناب‌ناپذیر است.




*شکل ۴. مقایسه برازش داده‌ها توسط دم‌های توزیع پارتوی تعمیم‌یافته و توزیع نرمال*

در گام بعد، ارزش در معرض ریسک شرطی برای یک پرتفوی با استفاده از کاپیولاهای چند متغیره با توزیع حاشیه‌ای دم‌پهن محاسبه شد. در ادامه شبیه‌سازی‌هایی به‌منظور محاسبه مرز کارای پرتفوی بهینه‌های ریسک–بازده صورت گرفت. برای مدل‌سازی کاپیولا ابتدا باید توزیع بازدهی هر سهم تعیین شود. اگرچه ممکن است توزیع هر یک ازسری‌های زمانی بازده‌ها به‌صورت پارامتریک تعیین شود، برازش یک مدل نیمه پارامتریک با استفاده از یک توزیع قطعه‌وار توسط دم‌های پارتوی تعمیم‌یافته بسیار سودمند است؛ بدین منظور می‌توان از نظریه ارزش فرین برای تحلیل بهتر رفتار هر دنباله بهره برد؛ همچنین شبیه‌سازی‌های چند متغیره از مدل‌های کاپیولا برای محاسبه ارزش در معرض ریسک شرطی مورداستفاده قرار گرفت و با انجام آزمون پس آزمایی کوپیک[1] صحت اطلاعات به‌دست‌آمده آزمون شد که نتایج آن در شکل ۵، ملاحظه می‌شود. با توجه به این شکل، نتایج برای کاپیولای گاوسی بسیار قابل‌قبول‌تر از روش توزیع نرمال چند متغیره است.




*شکل ۵. انجام آزمون پس آزمایی به دو روش مقایسه شده*

برای بررسی اعتبار مدل‌های ارزش در معرض ریسک (VaR) و Copula-CVaR از آزمون‌های لوپز استفاده شد. به همین منظور ۸۰ درصد داده‌ها برای برازش مدل و مابقی برای آزمون مدل به کار رفت. جدول ۲، نتایج آزمون اعتبار مدل VaR با رویکرد واریانس–کوواریانس و مدل COPULA-CVaR برای پرتفوی نمونه منتخب را نشان می‌دهد. یادآوری این نکته لازم است که وزن هر یک از دارایی‌ها در پرتفوی بر اساس وزن واقعی آن‌ها در ابتدای دوره در نظر گرفته

1. Kpiec test.

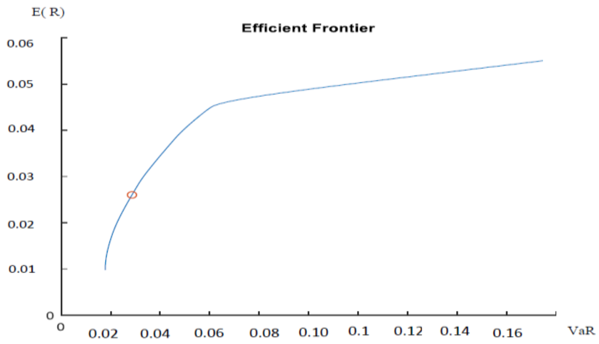
شد.

*جدول ۲. نتایج آزمون لوپز در سطح اطمینان ۹۵ و ۹۹ درصد*

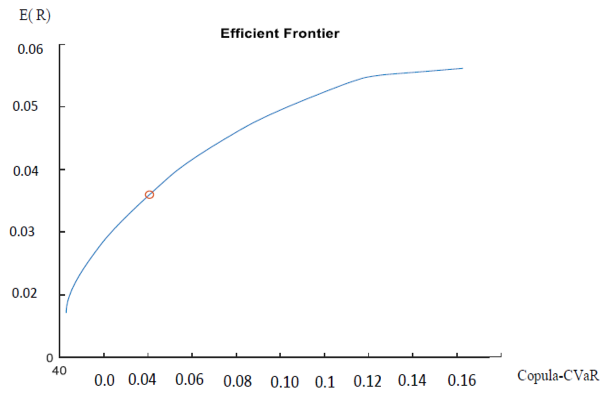
| **سطوح اطمینان** **شرح نتیجه** | **مدل** | **سطح ۹۹٪** | **سطح ۹۵٪** |
|---|---|---|---|
| تعداد تخطی | COPULA-CVaR | ۲۴ | ۳۱ |
| | VaR | ۲۸ | ۳۹ |
| مقدار بهینه QSP | COPULA-CVaR | ۰/۰۳۰۸۲ | ۰/۱۰۲۸ |
| | VaR | ۰/۰۴۸۷ | ۰/۱۲۷۸ |

به دلیل اینکه مقادیر محاسبه‌شده این دو مدل به مقدار بهینه آماره لوپز نزدیک است، پس قدرت تبیین هر دو مدل برای ارزیابی ریسک پرتفوی مناسب است.

در گام آخر، مرز کارا با استفاده از رویکرد ترکیبی Capula-CVaR به‌عنوان سنجه ریسک پرتفوی محاسبه و با مرز کارای مستخرج از مدل ارزش در معرض ریسک نرمال مقایسه شد. با توجه به شکل مرز کارای دو مدل، ملاحظه می‌شود که مرز کارای مستخرج از مدل ترکیبی Capula-CVaR عملکرد بهتری را ارائه می‌دهد




*شکل ۶. مرز کارای مدل ارزش در معرض ریسک*




*شکل ۷. مرز کارای مدل ترکیبی کاپیولا- CVaR*

یافتن مرز کارا و ترکیب بهینه سبد سهام عملکرد بهتری از روش ارزش در معرض ریسک دارد. برای بررسی دقیق این امر، بر اساس داده‌های گروه آزمون، مقدار VaR و CVaR برای دوره زمانی ۱۰روزه با سطح اطمینان ۹۹ درصد محاسبه و سپس ترکیب‌های بهینه پرتفوی در سطوح مختلف ریسک تعیین شد و بر اساس معیار شارپ عملکرد هر یک از آن‌ها موردبررسی قرار گرفت. دلیل انتخاب سطح اطمینان ۹۹ درصد این است که هر دو این مدل‌ها در سطح اطمینان ۹۹ درصد از اطمینان لازم برخوردار بوده‌اند. جدول ۳، نتایج ارزیابی عملکرد مدل VaR و Capula-CvaR را در سطوح مختلف ریسک با معیار شارپ نشان می‌دهد.

*جدول ۳. ارزیابی عملکرد مدل VaR و Copula-CVaR با معیار شارپ در سطوح مختلف ریسک*

| **عملکرد در سطوح مختلف ریسک** | **مدل VaR** | | | **مدل Capula-CvaR** | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **پرتفوی‌ها** | ٪۴ | ٪۵ | ٪۶ | ٪۴ | ٪۵ | ٪۶ |
| پرتفوی اول | ۰/۰۶۲۴ | ۰/۰۷۳۱ | ۰/۰۸۷۵ | ۰/۰۶۸۴ | ۰/۰۸۱۶ | ۰/۰۹۶۲ |
| پرتفوی دوم | ۰/۰۵۷۲ | ۰/۰۶۷۸ | ۰/۰۷۷۴ | ۰/۰۶۲۳ | ۰/۰۸۱۷ | ۰/۰۸۲۶ |
| پرتفوی سوم | ۰/۰۶۶۲ | ۰/۰۸۲۷ | ۰/۰۹۸۷ | ۰/۰۷۱۶ | ۰/۰۹۱۶ | ۰/۱۱۲۷ |
| پرتفوی چهارم | ۰/۰۷۲۱ | ۰/۰۷۹۸ | ۰/۰۹۲۵ | ۰/۰۷۸۴ | ۰/۰۸۱۴ | ۰/۱۲۰۸ |
| پرتفوی پنجم | ۰/۰۸۷۲ | ۰/۰۹۱۲ | ۰/۱۰۷۳ | ۰/۰۹۱۴ | ۰/۱۰۷۸ | ۰/۱۱۳۴ |
| پرتفوی ششم | ۰/۰۸۸۳ | ۰/۰۹۳۴ | ۰/۱۱۳۸ | ۰/۰۹۱۲ | ۰/۱۰۹۶ | ۰/۱۲۴۸ |
| پرتفوی هفتم | ۰/۰۶۲۴ | ۰/۰۷۳۱ | ۰/۰۹۲۶ | ۰/۰۷۱۸ | ۰/۰۸۴۶ | ۰/۰۹۹۸ |
| پرتفوی هشتم | ۰/۰۵۳۵ | ۰/۰۶۳۵ | ۰/۰۸۱۷ | ۰/۰۶۷۴ | ۰/۰۷۱۹ | ۰/۰۹۷۳ |
| پرتفوی نهم | ۰/۰۴۱۳ | ۰/۰۶۹۴ | ۰/۰۸۳۷ | ۰/۰۵۳۷ | ۰/۰۷۳۱ | ۰/۰۹۶۲ |
| پرتفوی دهم | ۰/۰۶۲۴ | ۰/۰۷۱۶ | ۰/۰۹۲۵ | ۰/۰۶۸۹ | ۰/۰۸۳۴ | ۰/۱۰۳۷ |

برای تأیید این فرضیه از روش آماری رتبه علامت‌دار ویلکاکسون استفاده‌شده است. با توجه به نتایج آزمون، رتبه علامت‌دار ویلکاکسون برای مقایسه عملکرد پرتفوهای بهینه در دو مدل ارزش در معرض ریسک و مدل ترکیبی Capula-CvaR (p=0. 008 و Z= -2. 87) مشاهده می‌شود مدل ترکیبی در طول دوره موردمطالعه در سطح ریسک یکسان، بازدهی بیشتری بر روی مرز کارای سرمایه‌گذاری ریسکی داشته است.

## ۵. بحث و نتیجه‌گیری

در این پژوهش کوشیده شد مدلی کاراتر از مدل‌های موجود و مرسوم برای بهینه‌سازی سبد سهام ارائه شود. مدلی که با درنظرداشتن شرایط ریسک سرمایه‌گذاری، بازدهی بیشتری را برای سرمایه‌گذاران فراهم کند. به همین منظور از یک مدل ترکیبی جدید برای بهینه‌سازی پرتفوی استفاده شد. در میان سنجه‌های مختلف ریسک، ارزش در معرض ریسک و نسخه شرطی آن سنجه‌های نوظهور است؛ بنابراین به‌منظور محاسبه ریسک بازار از روش ارزش در معرض ریسک و ارزش در معرض ریسک شرطی با ترکیب نظریه کاپیولای چندمتغیره بهره برده شد. بدین منظور در گام نخست با استفاده از سری زمانی بازدهی سهام شرکت‌های فعال و برتر بورسی (۵۰ شرکت برتر بورس اوراق بهادار تهران) در طی دوره ۱۳۹۳ تا پایان ۱۳۹۷ ارزش در معرض ریسک نرمال با رویکرد واریانس-کوواریانس و ارزش در معرض ریسک شرطی با استفاده از نظریه کاپیولا برآورد و پس آزمایی شد. در گام بعد، مرز کارا سرمایه‌گذاری ریسکی در «بورس اوراق بهادار تهران» با استفاده از یک مدل برنامه‌ریزی کوآدرتیک با رویکرد ارزش در معرض ریسک و رویکرد ترکیبی Capula-CVaR محاسبه و مقایسه شد. نتایج پژوهش حاکی از آن است که تشکیل سبد سهام بهینه با استفاده از رویکرد ترکیبی Capula-CVaR عملکرد بهتری از روش ارزش در معرض ریسک داشته است. به‌منظور مطالعات آتی پیشنهاد می‌شود که نظریه ارزش فرین برای یافتن مرز کارا سرمایه‌گذاری ریسکی در «بورس اوراق بهادار تهران» به کار رود و از مدل‌های جدیدتری مثل ارزش فرین – کاپیولا استفاده شود.

در مقایسه با پژوهش‌های مشابه، نتایج این پژوهش با پژوهش‌های سهام خدام و همکاران [۲۲] و فلاح‌پور و باغبان [۸]، همسو است.

## منابع

1. Abasi, E. & Teimurpur, B. & Barjesteh, M. (2009). Optimum Portfolio Selection Using Value at Risk in Tehran Stock Exchange. *Journal of Economic Research*, *44*, *75-90*. (In Persian)
2. Abdoh tabrizi, H. & Radpour, R. (2009). Market Risk Measurement and Management. *Agah Publishing*, 92-93. (In Persian)
3. Alexander, C. (2008). Market Risk Analysis: Quantitative Methods in Finance. Volum 3, *Wiley finance Series*, 168.
4. Bayat, A. & Asadi, L. (2017). Stock Portfolio optimization: Effectiveness of particle swarm optimization and Markowitz model. *Journal of financial engineering and portfolio management*, 32, 63-85. (In Persian)
5. Bermods, C. & Gomez, S. (2012). The Memetic Tree-based Genetic Algorithm and its application to Portfolio Optimization, *Springer Series in Operations Research and Financial Engineering*, 35.
6. Chen, W. & Wang, Y. &; kumar, M. (2018). A hybrid FA–SA algorithm for fuzzy portfolio selection with transaction costs. *Annals of Operations Research*, 269, issue 1-2.
7. Cherubini, U. & Mulinaci, S. & Gabi, F. (2011). Daynamic capula Methods in Finance. *The Wiley Series*, 325.
8. Fallahpour S. & Baghban M. (2015). Application of Copula-CVaR in Portfolio Optimization and Comparative with Mean-CVaR. *Journal of Economic Research and Policies*, 22(77), 155-172. (In Persian)
9. Fallahshams, M. & Ghazanfari, S. (2016). Evaluation of downside risk and stock returns in Tehran Stock Exchange via Extreme value theory. *Journal of Financial engineering and portfolio management*, 27, 137- 157. (In Persian)
10. Fernandez, A. & Gomez, S. (2007). Portfolio selection using neural networks. *Computer& Operations Research*, 4, 34-47.
11. Goel, A. & Amita, S. & Aparna, M. (2018). Robust optimization of mixed CVaR STARR ratio using copulas. *Journal of Computational and Applied*.
12. Gupta, P. & Gupta, M. & Mehlawat & Saxena, F. (2013). Asset portfolio optimization using fuzzy mathematical programming. *Information Sciences*, 178(6), 1734-1755.
13. Harry, J. (2014). Dependent Modeling with Copula, *Series: Chapman & Hall/CRC Monographs on Statistics & Applied Probability*, 85.
14. Keshavarz Haddad, G. & Heyrani, M. (2014). Estimation of Value at Risk in the Presence of Dependence Structure in Financial Returns: A Copula Based Approach. *Journal of Economic Research*, 4, 869-902. (In Persian)
15. Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, 7(1), 77-91.
16. Mousavi, M. & Raghfar H. & Mohseni, M.(2013). Estimation of the Value of Risky Stocks (Using Conditional Copila-Garch Method). *Iranian Journal of Economic Research*, 54, 119-152. (In Persian)
17. Najafi, A. & Pourahmadi, Z. (2015). Dynamic Portfolio Optimization with Transaction Cost. *Journal of Financial Engineering and Portfolio Management*,24, 152-172. (In Persian)
18. Nikoumaram, H. & mirabbasi, Y. &Saeidi, A. (2018). Study of portfolio optimization based on downside risk, upside potential and behavioral variables efficiency. *Journal of Financial engineering and portfolio management*, 34, 305-333. (In Persian)

19. Nikusokhan, M. (2018). GJR-Copula-CVaR Model for Portfolio Optimization: Evidence for Emerging Stock Markets. *Journal of Iran Economic Reviwe*, 4, 990-1005. (In Persian)

20. Pownall, R. (2017). Ptimal portfolio selection in a Value-at-Risk framework. *Journal of banking and finance*, 25.

21. Rahnama Roodposhti, F. & Nikoumaram, H. & Hosseinzadeh lotfi, F. & Bayat, M. (2017). Portfolio Optimization Performance Using Maximum Stable Sharp Ratio Compared to Markowitz Optimization. *Journal of Financial Management perspective*, 24, 125-145. (In Persian)

22. Sahamkhadam, M. & Stephan, A. & Östermark, R. (2018). Portfolio optimization based on GARCH-EVT- Copula forecasting Model. *International Journal of Forecasting*, 8(4), 497–506.

23. Saleh Abadi, A. & Sayar, M. & Shahryari, M. (2018). Portfolio optimization in an upside potential and downside risk (UPM-LPM) framework. *Journal of Financial engineering and portfolio management*, 36, 129-153. (In Persian)