

بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری در بورس اوراق بهادار تهران با استفاده از الگوریتم چرخه آب (WCA)

محمد مرادی*

چکیده

انتخاب سبد سرمایه‌گذاری بهینه یکی از مهم‌ترین چالش‌های علوم مالی است. هدف این مطالعه به‌کارگیری الگوریتم چرخه آب چندهدفه (MOWCA) برای یافتن ترکیبی کارآمد از سبد سرمایه‌گذاری است. مسئله مورد مطالعه یک مسئله چندهدفه غیرخطی است که توابع هدف آن حداکثرسازی بازده و حداقل‌سازی ریسک را شامل می‌شود. الگوریتم چرخه آب از فرآیند چرخه آب در طبیعت شبیه‌سازی شده و نخستین بار توسط مرادی و همکاران (۲۰۱۷)، برای بهینه‌سازی سبد سهام در چهار بورس بزرگ دنیا استفاده شد. نمونه این پژوهش شامل اطلاعات روزانه ۳۰ شرکت بزرگ بورس تهران طی سال‌های ۱۳۹۲ تا ۱۳۹۴ است؛ به‌علاوه، عملکرد MOWCA برای حل مسائل بهینه‌سازی چندهدفه با سایر بهینه‌سازهای چندهدفه، از قبیل الگوریتم ژنتیک چندهدفه (MOGA) و الگوریتم پرندگان چندهدفه (MOPSO)، مقایسه شد. به‌منظور مقایسه نتایج الگوریتم‌ها، چهار معیار عملکرد مرسوم شامل فاصله، یکنواختی، تنوع و پوشش به‌کار رفت. یافته‌ها حاکی از آن است که بر اساس اغلب معیارهای ارزیابی عملکرد مورد استفاده در این پژوهش، MOWCA در مقایسه با سایر الگوریتم‌های فراابتکاری برای مسائل بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری کارآمدی بیشتری دارد.

کلیدواژه‌ها: بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری؛ الگوریتم چندهدفه؛ الگوریتم چرخه آب؛ الگوریتم ژنتیک؛ الگوریتم پرندگان.

۱. مقدمه

مدیریت سبد سرمایه‌گذاری یکی از مهم‌ترین زمینه‌های پژوهش‌های مالی برای پژوهشگران است [۴۵]. مدیران سبدهای سرمایه‌گذاری، تلاش‌های بسیاری به‌منظور ایجاد سبد مناسب برای سرمایه‌گذاران انجام داده‌اند [۴۳]. ساختن سبد سرمایه‌گذاری مؤثر، وظیفه چندان آسانی نیست؛ به همین دلیل است که تمام کارشناسان مالی در حال تلاش برای یافتن یک مدل کاربردی بهتر در مقایسه با دیگران هستند.

اگرچه بخشی از تصمیم‌های انتخاب سبد سرمایه‌گذاری بر اساس مبنای کیفی اتخاذ می‌شود، ولی رویکردهای کمی بیشتر به کار می‌روند. مارکوتیز (۱۹۵۱) [۳۱] نخستین فردی بود که چارچوبی کمی برای انتخاب سبد سرمایه‌گذاری ایجاد کرد [۵]. او مدل میانگین - واریانس (M-V) را معرفی کرد که از دهه ۱۹۵۰ به پایه نظریه مالی مدرن تبدیل شد [۷]. این مدل در شکل ابتدایی خود، ترکیبی از دارایی‌های سبد سرمایه‌گذاری را به‌گونه‌ای تعیین می‌کند که ریسک را حداقل شده و درعین‌حال سبب دستیابی به بازدهی موردانتظار شود [۱۰]. این نظریه، روش تفکر درباره سبد سرمایه‌گذاری دارایی‌ها را متحول ساخت و به‌طور گسترده‌ای به‌عنوان یک ابزار کاربردی برای بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری موردقبول واقع شد. بعد از مارکوتیز (۱۹۵۱)، کارهای بسیاری برای بهبود و توسعه این مدل صورت گرفت [۷]. این کوشش‌ها، با توجه به محدودیت‌های بازار واقعی، سعی کردند مدل او را کاربردی‌تر سازند.

مسئله بهینه‌سازی مارکویتز و تعیین مرز کارای سرمایه‌گذاری، زمانی که تعداد دارایی‌های قابل سرمایه‌گذاری و محدودیت‌های موجود در بازار کم باشد، توسط مدل‌های ریاضی حل شدنی است؛ اما هنگامی که شرایط و محدودیت‌های دنیای واقعی در نظر گرفته شود، مسئله پیچیده و مشکل خواهد بود. سال‌ها است که در حل چنین مسائل پیچیده‌ای، ریاضیات پیشرفته و رایانه‌ها به کمک انسان شتافته‌اند تا هر چه بیشتر وی را در بیرون آوردن از شرایط عدم اطمینان محیطی و ابهام یاری رسانند. ازجمله روش‌هایی که در سال‌های اخیر در حل بسیاری از مسائل بهینه‌سازی، گره‌گشای ابهامات بشر بوده و در پاسخ به مسائل پیچیده، رویکردی موفق داشته‌اند، روش‌ها و الگوریتم‌های موسوم به ابتکاری (فراابتکاری) هستند. روش‌های ابتکاری که با هدف رفع کاستی‌های روش‌های کلاسیک بهینه‌سازی معرفی شدند با جست‌وجویی جامع و تصادفی، احتمال دستیابی به نتایج بهتر را تا حد زیادی تضمین می‌کنند. در سال‌های اخیر، الگوریتم‌های فراابتکاری متنوعی به‌منظور حل مشکلات بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری خلق شده‌اند. در این مطالعه، الگوریتم چرخه‌آب (WCA) به‌عنوان یک روش بهینه‌سازی برای حل انتخاب سبد سرمایه‌گذاری بهینه، معرفی و استفاده شده است؛ از این رو توانایی و کارایی WCA برای ایجاد راه‌حل‌های با کیفیت بالا برای مدل مارکوئیتز بررسی خواهد شد. ایده WCA

نخستین بار برای حل مشکلات بهینه‌سازی در علوم مهندسی توسط اسکندر و همکاران (۲۰۱۲) به‌عنوان یک روش برتر پیشنهاد شد [۱۴]؛ همچنین الگوریتم چرخه آب چندهدفه (MOWCA) توسط سداله و همکاران (۲۰۱۵)، برای حل مسائل چندهدفه اجرا شده و ارجح دانسته شده است [۳۸].

اخیراً مرادی و همکاران (۲۰۱۷)، از الگوریتم چرخه آب در علوم مالی بهره گرفته‌اند و بر اساس اطلاعات چهار بورس بزرگ دنیا بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری را با الگوریتم چرخه آب انجام داده‌اند [۳۴]. هدف اصلی مقاله حاضر آن است که با الهام‌گرفتن از کار مرادی و همکاران (۲۰۱۷)، کارایی WCA برای بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری در «بورس اوراق بهادار تهران» بررسی شود [۳۴]. از آنجاکه بورس تهران از جنبه‌های مختلف، از جمله کارایی، در سطح کمتری نسبت به بورس‌های پیشرفته دنیا قرار دارد و ممکن است این الگوریتم برای بهینه‌سازی سبد سهام در بازاری متفاوت نتیجه متفاوتی نیز در بر داشته باشد، این مطالعه برای نخستین بار آن را در بورس تهران به‌کار بسته و نتایج آن را با دو الگوریتم رایج بهینه‌سازی، یعنی الگوریتم ژنتیک (GA) و پرندگان (PSO)، مقایسه می‌کند.

۲. مبانی نظری و پیشینه پژوهش

به‌رغم سادگی و تجدیدنظر شهودی ساختار سبد سرمایه‌گذاری که از نظریه سبد سرمایه‌گذاری مدرن استفاده می‌کند، سال‌های زیادی طول می‌کشد که مدیران سبد سرمایه‌گذاری از بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری برای مدیریت پول واقعی، استفاده کنند. در دنیای واقعی، نگرانی‌های بسیاری در رابطه با استفاده از آن و بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری وجود دارد؛ زیرا بسیاری از استفاده‌کنندگان به‌کارگیری آن را غیرعملی می‌دانند [۲۳].

اخیراً الگوریتم‌های متنوعی برای حل مسائل بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری توسعه پیدا کرده‌اند. دو الگوریتم رایج مورد استفاده برای حل این مسئله مالی عبارت‌اند از: الگوریتم ژنتیک و الگوریتم پرندگان که در ادامه علاوه بر الگوریتم چرخه آب مختصری به آن‌ها پرداخته خواهد شد [۴۰، ۳۵، ۲۸، ۶].

الف: الگوریتم ژنتیک (GA). الگوریتم ژنتیک یکی از پر استفاده‌ترین الگوریتم‌های اکتشافی، بر مبنای فرایند ژنتیکی موجودات زنده است. الگوریتم ژنتیک یکی از معروف‌ترین روش‌های بهینه‌سازی در مسائل بهینه‌سازی مالی است که در علوم مالی استفاده می‌شود [۴، ۵، ۴۰]. GA نخستین بار به‌وسیله هالند (۱۹۷۵) [۱۸] معرفی و به‌سرعت به بهترین تکنیک شناخته‌شده تبدیل شد [۶]. GA یک روش بهینه‌سازی است که با تقلید اصول تکاملی و پردازش کروموزومی

در ژنتیک طبیعی کار می‌کند. GA از نظریه تکاملی داروین الگوبرداری شده است. این الگوریتم بر روی جمعیتی از جواب‌های بالقوه عمل کرده و با به‌کارگیری بقای اصلح، تقریب بهتری از حل موردنظر را ارائه می‌کند. الگوریتم ژنتیک شامل طراحی افراد جوامع اولیه (کروموزوم‌ها)، انتخاب از میان بهترین افراد (بقای شایسته‌ترین‌ها) و تلاقی افراد نسل‌ها (ازدواج زوج‌های برتر) است [۳۳].

GA جست‌وجوی خود را با مجموعه‌ای از راه‌حل‌های تصادفی که معمولاً در رشته‌های دودویی کدگذاری می‌شوند، آغاز می‌کند. هر راه‌حل تناسبی است که به‌طور مستقیم به عملکرد هدف مسئله بهینه‌سازی اختصاص داده شده است. پس از آن، جمعیت راه‌حل‌ها به یک تغییر جدید با استفاده از سه عامل مشابه با عوامل ژنتیک طبیعی تبدیل می‌شود. این روند به‌طور پیوسته در هر نسل تا زمانی که معیار پایان‌دهی برآورده شود، کار می‌کند [۱۸].

پژوهشگران بسیاری از رویکردهای انتخاب سید سرمایه‌گذاری مبتنی بر GA استفاده کرده‌اند. برای مثال، کیونگ و همکاران (۲۰۰۵)، از GA در بهینه‌سازی سید سرمایه‌گذاری برای مدیریت صندوق استفاده کرده‌اند [۲۴]. چنگ و همکاران (۲۰۰۹) و لین و لیو (۲۰۰۸)، GA را برای انتخاب سید سرمایه‌گذاری با حداقل تعداد معامله پیشنهاد داده‌اند [۶، ۲۷]. لین و ژن (۲۰۰۷) و عباسی و ابوالی و سربازی (۲۰۱۲)، نیز از این الگوریتم برای انتخاب سید بهینه سرمایه‌گذاری استفاده کرده‌اند [۱، ۲۸].

ب: الگوریتم پرندگان (PSO). PSO در اصل به کندی و ابره‌ارت (۱۹۹۵) نسبت داده می‌شود و نخستین بار برای شبیه‌سازی رفتار اجتماعی معرفی شد و به‌عنوان نمایشی از حرکات پرندگان به کار رفت [۲۱]. PSO، الگوریتم بهینه‌سازی تصادفی گروهی است که از شبیه‌سازی رفتار اجتماعی گروه در یافتن غذا الهام گرفته شده است. گروهی از پرندگان در فضایی به‌صورت تصادفی دنبال غذا می‌گردند. تنها یک تکه غذا در فضای موردبحث وجود دارد. هیچ‌یک از پرندگان محل غذا را نمی‌دانند؛ ولی در هر مرحله فاصله خود را تا محل غذا می‌دانند و بر این اساس، بهترین رویکرد برای یافتن غذا، پیروی کردن از نزدیک‌ترین پرنده به غذا است. یکی از بهترین استراتژی‌ها می‌تواند دنبال کردن پرنده‌ای باشد که کمترین فاصله را تا غذا داشته باشد که PSO این رفتار را در مسائل بهینه‌سازی شبیه‌سازی می‌کند. این استراتژی در واقع جان‌مایه الگوریتم است. هر پرنده یک جواب ممکن در فضای جست‌وجوی مسئله است که به آن ذره گفته می‌شود. PSO در الگوریتم، معادل یک پرنده در الگوی حرکت جمعی پرندگان است. هر ذره یک مقدار شایستگی دارد که توسط یک تابع شایستگی محاسبه می‌شود. هرچه ذره در فضای جست‌وجو به هدف غذا در مدل حرکت پرندگان نزدیک‌تر باشد، شایستگی بیشتری دارد.

این الگوریتم براساس یک مدل روان‌شناختی تأثیر و یادگیری اجتماعی است. در PSO ازدحام به جمعیت و ذره به یک فرد شباهت دارد. این الگوریتم با ازدحام یک ذره شروع می‌شود و موقعیت هر ذره یک راه‌حل ممکن را نشان می‌دهد. ذرات از طریق فضای جست‌وجوی چندبعدی به وسیله تنظیم پویای سرعت با توجه به تجربه خود و همسایگان خود پرواز می‌کنند [۲۱].

کارایی PSO، در بسیاری از مطالعات تجربی ثابت شده [۲، ۴۱، ۴۴] و به‌طور گسترده‌ای برای حل مسائل بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری به‌کار رفته است. این الگوریتم در برخی از پژوهش‌ها بر روی سبد سرمایه‌گذاری ریسکی، آزمون و با GA مقایسه شده و کارایی محاسباتی بالایی را در بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری نشان داده است [۱۳، ۲۹، ۴۵].

اخیراً گل‌مکانی و فاضل (۲۰۱۱)، از PSO برای انتخاب سبد سرمایه‌گذاری محدود استفاده کرده‌اند. آن‌ها نشان دادند که PSO پیشنهادشده به‌طور خاص از GA، به‌خصوص در مسائلی با مقیاس بزرگ، بهتر عمل می‌کند [۱۶]. کورازا و همکاران (۲۰۱۳)، یک فرمول‌بندی جدید PSO را برای حل مسائل پیچیده انتخاب سبد سرمایه‌گذاری پیشنهاد داده‌اند [۹]؛ همچنین بیات و اسدی (۲۰۱۷)، برای انتخاب سبد سهام در «بورس اوراق بهادار تهران» از الگوریتم پرندگان و مدل مارکویتز استفاده کرده‌اند [۳].

ج: الگوریتم چرخه آب (WCA). WCA مبتنی بر مشاهده روند چرخه آب در طبیعت است و چگونگی سرازیر شدن رودخانه‌ها و نهرها به سمت دریاها مبنای آن است. این روش نخستین بار توسط اسکندر و همکاران (۲۰۱۲)، برای حل مسائل بهینه‌سازی مهندسی معرفی شد [۱۴]. آن‌ها نشان دادند که WCA توانایی بیشتری برای یافتن دامنه‌ای از راه‌حل‌ها در مقایسه با GA و PSO دارد. WCA در مقایسه با GA و PSO، موفقیت‌های قابل‌توجهی در ارائه راه‌حل‌های باکیفیت برای بسیاری از مسائل پیچیده بهینه‌سازی در مهندسی داشته است. مطالعه مرادی و همکاران (۲۰۱۷)، تنها مطالعه‌ای که در آن از این الگوریتم برای بهینه‌سازی سبد سهام استفاده شده است [۳۴]. آن‌ها از این الگوریتم برای بهینه‌سازی سبد سهام شرکت‌های حاضر در بورس‌های S&P در آمریکا، Hang Seng در هنگ‌کونگ، FTSE در بریتانیا و DAX در آلمان استفاده کردند. نتایج این پژوهش نمایانگر کارایی و عملکرد بهتر الگوریتم چرخه آب نسبت به الگوریتم ژنتیک و الگوریتم پرندگان است. پژوهش حاضر بر آن است تا برای نخستین بار کارایی این الگوریتم را در بهینه‌سازی پرتفوی سهام شرکت‌های پذیرفته‌شده در «بورس اوراق بهادار تهران» موردبررسی قرار دهد.

فرمول‌بندی مسئله سبد سرمایه‌گذاری. در این بخش، مسئله بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری فرمول‌بندی شده است. برای حل مسئله انتخاب سبد سرمایه‌گذاری، نمادهای مورد استفاده در این تحلیل بر مبنای مدل مارکوویتز (۱۹۵۱-۱۹۵۲) هستند [۳۱، ۳۲]. مارکوویتز نخستین پژوهشگری بود که واریانس یا انحراف استاندارد را به‌عنوان معیاری از ریسک به‌کار برد. او فرض کرد که شکل کلاسیک می‌تواند به شرح معادله ۱، فرمول‌بندی شود:

$$\text{Minimize } \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N W_i W_j \delta_{ij} \quad \text{رابطه (۱)}$$

معادله ۱، کل واریانس (ریسک) در ارتباط با سبد سرمایه‌گذاری را حداقل می‌کند. مدل مارکوویتز بر مبنای مفروضات زیر بیان شده است: سرمایه‌گذاران ریسک‌گریزند و دارای مطلوبیت موردانتظار افزایشی هستند و منحنی مطلوبیت نهایی ثروت آن‌ها کاهشی است. سرمایه‌گذاران دنیای واقعی مجبورند با محدودیت‌های زیادی، مثل محدودیت‌های تجاری، اندازه سبد سرمایه‌گذاری و غیره روبه‌رو شوند. اگر تعداد متغیرها افزایش یابد یا اگر محدودیت‌های اضافی از قبیل محدودیت در وزن سرمایه‌گذاری و غیره وجود داشته باشد، مسئله بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری پیچیده می‌شود. با وجود چنین محدودیت‌هایی در دنیای واقعی پژوهشگران به دنبال توسعه مدل مارکوویتز از طریق گنجاندن این محدودیت‌ها در الگوی اصلی هستند [۳۰]؛ بنابراین به‌منظور کاربردی کردن مدل معادله ۱، مشکل بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری به‌عنوان یک مسئله با تابع چندهدفه موردبررسی قرار می‌گیرد؛ جایی که بازدهی موردانتظار، حداکثر (یعنی اولین تابع هدف) و ریسک، حداقل (یعنی دومین تابع هدف) می‌شود؛ بنابراین شکل استاندارد هدف و محدودیت‌ها برای بهینه‌سازی در این مطالعه به شرح معادلات زیر خواهد بود:

$$\text{Maximize Portfolio Return } F_1(w) = \sum_{i=1}^N w_i \bar{r}_i, \quad \text{رابطه (۲)}$$

$$\text{Minimize Portfolio Risk } F_2(w) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j \delta_i \delta_j \rho_{ij}, \quad \text{رابطه (۳)}$$

subject to:

$$\sum_{i=1}^N w_i = 1, \quad \text{رابطه (۴)}$$

$$0 \leq w_i \leq 1, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N, \quad \text{رابطه (۵)}$$

\bar{r}_i بازده موردانتظار دارایی i ام است. N تعداد دارایی‌های در دسترس، w_i نسبت سرمایه‌گذاری در دارایی i ام، ρ_{ij} همبستگی بین دارایی i و j و δ_i و δ_j به ترتیب انحراف معیار بازده سهام i و j

هستند؛ بنابراین معادله ۲، بازده سبد سرمایه‌گذاری را بیشینه و معادله ۳، کل ریسک مرتبط با سبد سرمایه‌گذاری را حداقل می‌کند. از لحاظ محدودیت‌های به‌کار برده‌شده معادله ۴، این اطمینان را می‌دهد که جمع نسبت‌ها یا وزن‌های سرمایه‌گذاری‌ها برابر ۱ است؛ بنابراین همان‌طور که در معادله ۵، دیده می‌شود نسبت هر دارایی بین صفر (کمترین مقدار) و یک (بیشترین مقدار) است.

دو مؤلفه مهم در تصمیم‌گیری برای سرمایه‌گذاری، میزان ریسک و بازده دارایی‌های سرمایه‌ای است. انتخاب مجموعه دارایی بهینه اغلب با تبادل بین ریسک و بازده صورت می‌گیرد و هرچه ریسک مجموعه دارایی بیشتر باشد، سرمایه‌گذاران انتظار دریافت بازده بالاتری خواهند داشت. شناسایی مرز کارایی مربوط به سبد دارایی‌ها این امکان را به سرمایه‌گذاران می‌دهد که بر اساس تابع مطلوبیت و درجه ریسک‌گریزی و ریسک‌پذیری خود، بیشترین بازده موردانتظار از سرمایه‌گذاری خود به‌دست آورند. هر یک از سرمایه‌گذاران بر مبنای ریسک‌پذیری و ریسک‌گریزی خود، نقطه‌ای را بر روی مرز کارا انتخاب کرده و ترکیب پرتفوی خود را با هدف بیشینه‌کردن بازده و کمینه‌کردن ریسک تعیین می‌کند. بهینه‌سازی پرتفوی عبارت است از: انتخاب بهترین ترکیب از دارایی‌های مالی به‌نحوی که باعث شود تا حد ممکن بازده پرتفوی سرمایه‌گذاری حداکثر و ریسک پرتفوی حداقل شود.

مسائل بهینه‌سازی چندهدفه (MOPs)

فرمت استاندارد MOP. یک مسئله بهینه‌سازی چندهدفه (MOP) یک حوزه تصمیم‌گیری چندمعیاره است که شامل بیش از یک تابع هدف است که به‌طور هم‌زمان بهینه می‌شوند:

$$F(X) = [F_1(X), F_2(X), \dots, F_m(X)]^T \quad \text{رابطه (۶)}$$

درحالی‌که $X = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_d]$ ، یک بردار از متغیرها و d و m تعداد متغیرها و اهداف هستند. یک رویکرد ساده برای حل MOPs استفاده از انواع وزن‌ها برای تبدیل یک MOPs به یک مسئله بهینه‌سازی یک‌هدفه است. این مسئله می‌تواند بر مبنای معادله ۷، فرمول‌بندی شود:

$$F = \sum_{i=1}^m w_i f_i \quad \text{رابطه (۷)}$$

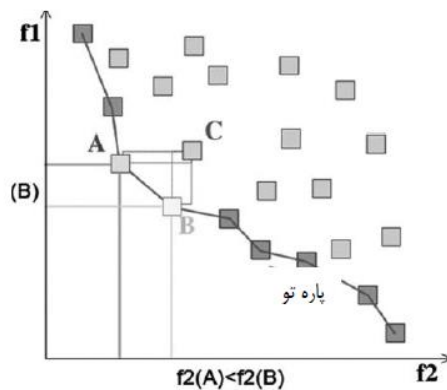
درحالی‌که m تعداد توابع هدف و w_i و f_i به‌ترتیب عوامل وزنی و توابع هدف هستند. با این‌حال، این کار وقت‌گیر است و به‌عنوان ناکامی عمده این روش در نظر گرفته می‌شود. رایج‌ترین راه‌حل MOPها، با نگاه‌داشتن مجموعه‌ای از بهترین راه‌حل‌ها در یک آرشیو و به‌روزرسانی آرشیو در هر تکرار است. در این روش، بهترین راه‌حل به‌عنوان راه‌حل‌های غیرغالب یا راه‌حل‌های بهینه پارتو تعریف می‌شوند. یک راه‌حل را در صورتی می‌توان به‌عنوان یک راه‌حل غیرغالب در نظر گرفت که اگر و تنها اگر شرایط زیر را برآورده سازد [۸]:

الف) تسلط پارتو: $U = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_n) < V = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_n)$ ، اگر و تنها اگر U به‌صورت جزئی از V در فضای هدف کمتر باشد که به این معنی است:

$$\begin{cases} F_i(U) \leq F_i(V) & \forall i \\ F_i(U) < F_i(V) & \exists i \end{cases} \quad i = 1, 2, 3, \dots, m \quad \text{رابطه (۸)}$$

ب) راه‌حل بهینه پارتو: بردار U یک راه‌حل بهینه است اگر و تنها اگر هیچ‌یک از راه‌حل‌های دیگر نتوانند U را تحت سلطه قرار دهند. مجموعه‌ای از راه‌حل‌های بهینه پارتو جبهه بهینه پارتو (PF_{optimal}) نامیده می‌شود.

شکل ۱، نشان می‌دهد که از میان سه راه‌حل A و B و C ، راه‌حل C بیشترین مقدار را برای f_1 و f_2 دارد و در نتیجه راه‌حل غالب قلمداد می‌شود؛ در مقابل، هر دو راه‌حل A و B می‌توانند به‌عنوان راه‌حل‌های غیرغالب در نظر گرفته شوند [۳۷، ۳۸].



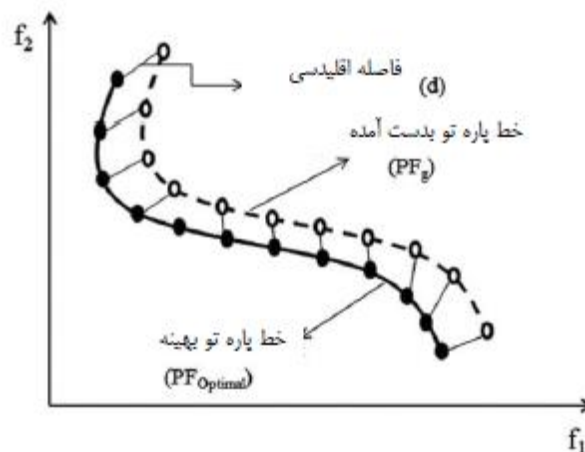
نمودار ۱. راه‌حل‌های بهینه پارتو (A و B) برای فضای دوبعدی [۳۷، ۳۸]

معیارهای عملکرد برای MOPها. در این مقاله از چهار پارامتر عملکرد برای ارزیابی عملکرد الگوریتم‌ها بهره گرفته می‌شود: معیار فاصله (GD)، معیار یکنواختی (S)، معیار تنوع (Δ) و معیار حداکثر پوشش (MS) [۳۷ و ۳۸].

ولدهوتیزن و لمونت (۱۹۹۸) [۴۲] معیار GD را معرفی کردند که فاصله خط راه‌حل‌های بدیت آمده با خط پارتو را نشان می‌دهد. این معیار توانایی الگوریتم‌های مختلف را برای یافتن مجموعه‌ای از راه‌حل‌های غیرغالب که کمترین فاصله را با جبهه بهینه پارتو دارند، مشخص می‌کند. یک الگوریتم با حداقل GD بهترین همگرایی با جبهه بهینه پارتو را دارد. این ارزیابی به شرح زیر تعریف شده است:

$$GD = \left(\frac{1}{NPF} \sum_{i=1}^{NPF} d_i^2 \right)^{1/2}, \quad \text{رابطه (۹)}$$

NPF تعداد اعضای به‌دست‌آمده در جبهه پارتو (PF) و d فاصله اقلیدسی بین عضو i ام در PF_g و نزدیک‌ترین عضو در $PF_{optimal}$ است. شکل ۲، نمایی شماتیک از معیار ارزیابی GD در فضای دوبعدی را نشان می‌دهد. بهترین معیار به‌دست‌آمده برای GD برابر با صفر است؛ بدین معنی که PF_g دقیقاً روی خط بهینه یا $PF_{optimal}$ است.



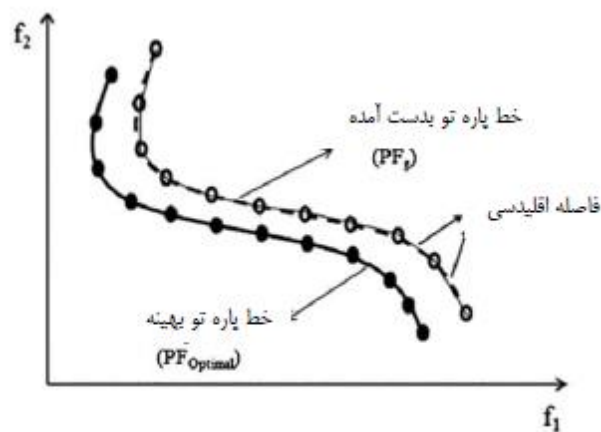
شکل ۲. نمایی شماتیک از معیار GD برای MOPs [۴۲]

اسکات (۱۹۹۵)، معیار فاصله بین راه‌حل‌های به‌دست‌آمده (یکنواختی) (S) را معرفی کرد که نشان‌دهنده توزیع راه‌حل‌های غیرغالب با استفاده از یک الگوریتم خاص است [۳۹]. این معیار

می‌تواند نشان دهد که چگونه راه‌حل‌های به‌دست‌آمده میان یکدیگر توزیع می‌شوند و می‌تواند به‌عنوان معادله زیر تعریف شود:

$$S = \sqrt{\frac{1}{NPF-1} \sum_{i=1}^{NPF} (\tilde{d}_i - \bar{d})^2}, \quad \text{رابطه (۱۰)}$$

در معادله ۱۰، $\tilde{d}_i = \min_j (|f_1^i(x) - f_1^j(x)| + |f_2^i(x) - f_2^j(x)|)$ ، $i, j = 1, \dots, NPF$ و \bar{d} میانگین تمام d_i ها است. کمترین مقدار S به بهترین توزیع یکنواخت در PF_g می‌انجامد. اگر تمام راه‌حل‌های غیرغالب به‌صورت یکنواخت در PF_g توزیع شوند، مقدار d_i و d مشابه هستند؛ در نتیجه مقدار معیار S برابر با صفر است. شکل ۳، نمایی شماتیک از معیار فاصله را نشان می‌دهد.

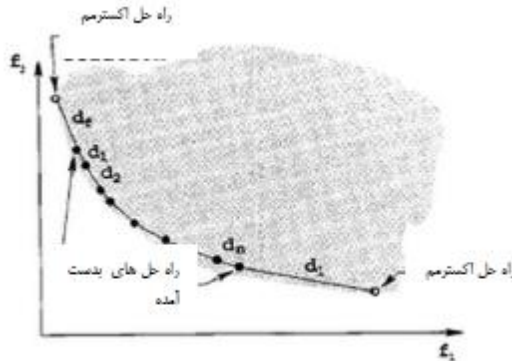


شکل ۳. نمایی شماتیک از ارزیاب‌ها برای $MOPs$ [۳۹]

دب (۲۰۰۱)، معیار تنوع (Δ) را پیشنهاد کرد. این معیار میزان گسترش راه‌حل‌های غیرغالب به‌دست‌آمده از یک الگوریتم مشخص را نشان می‌دهد [۱۱]. این معیار نمایانگر چگونگی گسترش راه‌حل‌ها در حوالی $PF_{optimal}$ است و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Delta = \frac{d_f + d_i + \sum_{i=1}^{NPF} |d_i - \bar{d}|}{d_f + d_i + (NPF - 1)\bar{d}}, \quad \text{رابطه (۱۱)}$$

d_l و D_f فاصله بین راه‌حل‌های اکسترمم (نقاط ابتدایی و انتهایی) در PF_g و $PF_{optimal}$ است. d_i فاصله بین هر نقطه در PF_g و نزدیک‌ترین نقطه در $PF_{optimal}$ است. این معیار فاصله نقطه به نقطه نمودارها است. مقدار معیار Δ همیشه بزرگ‌تر از صفر است و مقدار کمتر آن به معنای بهترین توزیع و گسترش راه‌حل‌ها است. در شرایطی که Δ برابر با صفر باشد، شرایط عالی است که نشان می‌دهد برای تمام نقاط غیرغالب $d_i = -d$. شکل ۴، نمایی شماتیک از معیار ارزیابی Δ برای یک جبهه بهینه پارتو را نشان می‌دهد.



شکل ۴. نمایی شماتیک از معیار تنوع (Δ) برای $MOPs$ (۱۱ و ۱۲)

معیار حداکثر پوشش (MS) نشان می‌دهد که نقاط ابتدایی و انتهایی خط PF_g تا چه حد نقاط مشابه را در خط $PF_{optimal}$ پوشش می‌دهد و بدین‌منظور نزدیکی دو نقطه اکسترمم در PF_g و $PF_{optimal}$ را اندازه می‌گیرد. این معیار نشان می‌دهد که خط راه‌حل‌های غیرغالب کشف‌شده تا چه حد خط پارتو را پوشش می‌دهد و طبیعتاً هر چه میزان پوشش بیشتر باشد بهتر است. این معیار به‌صورت رابطه ۱۲، تعریف می‌شود:

$$MS = \left[\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left[\frac{\min(f_i^{\max}, F_i^{\max}) - \max(f_i^{\min}, F_i^{\min})}{F_i^{\max} - F_i^{\min}} \right]^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \text{رابطه (۱۲)}$$

f_1^{\min} و f_1^{\max} به ترتیب بیشینه و کمینه هدف f_1 در PF_g و F_1^{\min} و F_1^{\max} به ترتیب بیشینه و کمینه هدف f_1 در $PF_{optimal}$ هستند. مقدار بزرگ‌تر MS به معنای گسترش بهتر راه‌حل‌ها است [۳۷، ۳۸].

WCA چند هدفه برای بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری

الگوریتم چرخه آب. مشابه دیگر الگوریتم‌های فراابتکاری، WCA نیز با جمعیت اولیه یا به اصطلاح قطرات باران شروع می‌شود. در ابتدا، بهترین فرد (بهترین قطره آب) به عنوان دریا انتخاب می‌شود؛ پس از آن تعدادی از قطرات باران خوب به عنوان رودخانه و بقیه قطرات باران به عنوان نهرها در نظر گرفته می‌شوند که به سمت رودخانه‌ها و دریا جریان می‌یابند. در روش WCA به یک راه‌حل واحد «قطره باران» اطلاق می‌شود. در روش‌های PSO و GA در اصطلاح چنین آرایه‌ای به ترتیب «موقعیت پرندگان/ ذرات» و «ژن/ کروموزوم» نامیده می‌شود.

با فرض اینکه بارندگی وجود دارد. جمعیت اولیه متغیرهای طراحی (یعنی جمعیت جریان‌ها) پس از فرآیند باران به صورت تصادفی به دست آمده است. بهترین فرد (یعنی بهترین جریان)، با داشتن حداقل تابع هزینه (برای مسئله کمینه‌سازی)، به عنوان دریا انتخاب شده است؛ سپس تعدادی از جریان‌های خوب (یعنی مقدار تابع هزینه نزدیک به بهترین نتیجه ثبت شده باشد) به عنوان رودخانه‌ها انتخاب شده‌اند؛ درحالی‌که جریان‌های دیگر به رودخانه‌ها و دریا می‌روند. در یک مسئله بهینه‌سازی D، یک جریان یک آرایه از $1 * D$ است. در شروع یک الگوریتم بهینه‌سازی، یک جمعیت اولیه نمایانگر یک ماتریس جریان‌ها در اندازه $N_{pop} * D$ است؛ از این رو یک ماتریس جمعیت اولیه که به صورت تصادفی به دست آمده است دارای ردیف‌ها و ستون‌هایی به ترتیب با اندازه تعداد جمعیت و تعداد متغیرهای طراحی است.

$$Total \ Population = \begin{bmatrix} Sea \\ River_1 \\ River_2 \\ River_3 \\ \vdots \\ Stream_{N_{sr}+1} \\ Stream_{N_{sr}+2} \\ Stream_{N_{sr}+3} \\ \vdots \\ Stream_{N_{pop}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^1 & x_2^1 & x_3^1 & \dots & x_D^1 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_D^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{N_{pop}} & x_2^{N_{pop}} & x_3^{N_{pop}} & \dots & x_D^{N_{pop}} \end{bmatrix}, \quad \text{رابطه (۱۳)}$$

N_{POP} و D به ترتیب اندازه جمعیت و تعداد متغیرهای طراحی هستند. هر یک از مقادیر متغیرهای تصمیم (X_1, X_2, \dots, X_D) می‌تواند به عنوان شماره نقطه شناور (مقادیر واقعی) یا به عنوان مجموعه‌ای از پیش تعریف شده برای مسائل مداوم و گسسته نمایش داده شود. هزینه یک جریان به وسیله ارزیابی تابع هزینه به دست می‌آید.

در مرحله اول، N_{pop} از جریان‌ها به‌وجود می‌آید. تعدادی از N_{sr} از بهترین افراد (حداقل مقادیر) به‌عنوان دریا و رودخانه‌ها انتخاب می‌شوند. در واقع، N_{sr} جمع تعداد رودخانه‌ها و یک دریا است. بقیه جمعیت (مثل جریان‌هایی که به رودخانه یا مستقیماً به دریا می‌روند) به‌عنوان جریان در نظر گرفته می‌شوند.

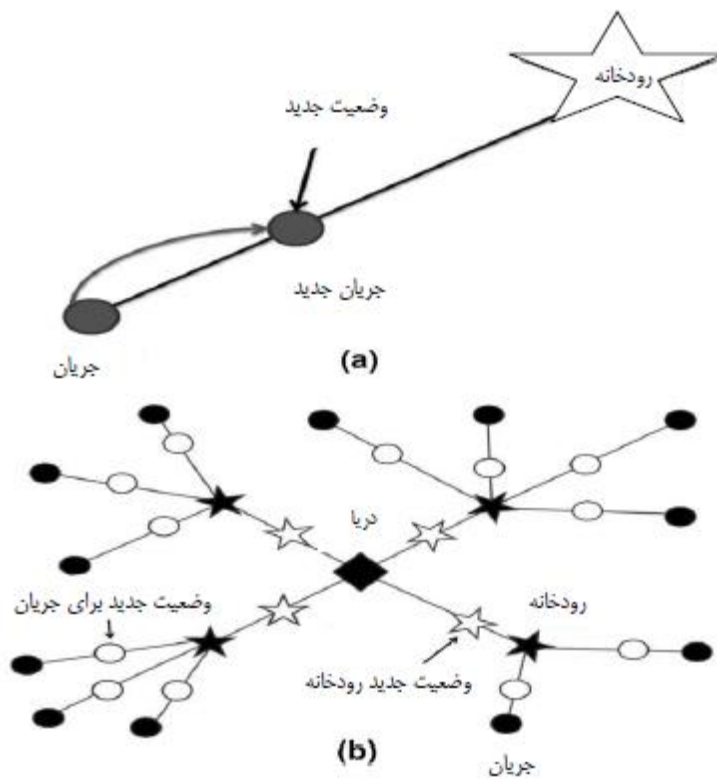
بسته به مقدار جریان، هر رودخانه آب را از جریان‌ها جذب می‌کند؛ از این رو مقدار آبی که به رودخانه یا دریا وارد می‌شود از جریانی به جریان دیگر فرق می‌کند؛ علاوه بر این، رودخانه‌ها از محلی که بیشترین سرآشیزی را دارد به سمت دریا می‌روند. جریان‌های طراحی شده برای هر یک از رودخانه‌ها و دریا با استفاده از معادله ۱۴، محاسبه می‌شوند [۱۴]:

$$C_n = Cost_n - Cost_{N_{sr}+1} \quad n = 1, 2, 3, \dots, N_{sr} \quad , \quad (14) \text{ رابطه}$$

$$NS_n = \text{round} \left\{ \frac{C_n}{\sum_{n=1}^{N_{sr}} C_n} \times N_{Streams} \right\} \quad , \quad n = 1, 2, \dots, N_{sr} \quad ' \quad (15) \text{ رابطه}$$

NS_n تعداد جریان‌هایی است که به سمت رودخانه‌ها و دریای مشخص می‌روند. همان‌طور که در طبیعت اتفاق می‌افتد، جریان‌ها از قطرات باران تشکیل می‌شوند و به یکدیگر می‌پیوندند تا رودخانه جدیدی تولید کنند. برخی از جریان‌ها ممکن است حتی به‌صورت مستقیم به سمت دریا حرکت کنند. همه رودخانه‌ها و جریان‌ها در نهایت به دریا منتهی می‌شوند که منطبق با بهترین راه‌حل است. فرض کنید که جریان‌های N_{POP} وجود دارد که $N_{sr}-1$ جریان به‌عنوان رودخانه و یکی به‌عنوان دریا انتخاب شده است. شکل ۵، نمایی شماتیک از جریان‌ها به سمت یک رودخانه مشخص در کنار خطوط ارتباطی آن‌ها را نشان می‌دهد.

در مرحله بهره‌برداری از WCA، وضعیت و موقعیت‌های جدیدی برای جریان‌ها و رودخانه‌ها پیشنهاد شده‌است که به شرح زیر هستند [۱۴]:



شکل ۵. نمایی شماتیک از ۱. حرکت جریان‌ها به سمت رودخانه مشخص؛ ۲. فرایند بهینه‌سازی WCA [۱۴]

$$\vec{X}_{Stream}^{t+1} = \vec{X}_{Stream}^t + rand \times C \times (\vec{X}_{Sea}^t - \vec{X}_{Stream}^t) \quad \text{رابطه (۱۶)}$$

$$\vec{X}_{Stream}^{t+1} = \vec{X}_{Stream}^t + rand \times C \times (\vec{X}_{River}^t - \vec{X}_{Stream}^t), \quad \text{رابطه (۱۷)}$$

$$\vec{X}_{River}^{t+1} = \vec{X}_{River}^t + rand \times C \times (\vec{X}_{Sea}^t - \vec{X}_{River}^t), \quad \text{رابطه (۱۸)}$$

C عددی بین ۱ و ۲ بوده و بهترین مقدار برای C عدد ۲ است و rand یک عدد تصادفی است که به صورت یکنواخت توزیع شده است و بین صفر و یک است. معادله ۱۶ و ۱۷ برای جریان‌هایی هستند که به ترتیب به دریا و رودخانه‌های مربوط جریان می‌یابند. نمادهای دارای علامت بردار، نشان‌دهنده مقادیر برداری است و در غیر این صورت بقیه نمادها و پارامترها به عنوان مقادیر اسکالر در نظر گرفته می‌شوند. اگر راه‌حل ارائه شده توسط جریان بهتر از رودخانه

مرتبط با آن باشد، موقعیت‌های رودخانه و جریان عوض می‌شود. یک تعویض مشابه برای رودخانه و دریا نیز وجود دارد.

عامل تبخیر برای جلوگیری از همگرایی زودرس (نابالغ) در بهینه محلی تعریف شده است (مرحله بهره‌برداری) [۳۸]. اساساً تبخیر آب به نزولات و بارش‌های جدیدی منجر می‌شود؛ بنابراین باید بررسی شود که آیا جریان یا رودخانه به اندازه کافی برای ایجاد فرایند تبخیر به دریا نزدیک است یا خیر؟ بدین منظور معیار زیر برای شرایط تبخیر استفاده می‌شود [۱۴]:

$$\text{if } \left\| \bar{X}_{Sea}^t - \bar{X}_{River}^t \right\| < d_{\max} \quad \text{or} \quad \text{rand} < 0.1 \quad j = 1, 2, 3, \dots, N_{sr} - 1$$

d_{\max} یک عدد کوچک نزدیک به صفر است؛ بنابراین اگر فاصله بین رودخانه و دریا کمتر از d_{\max} باشد، نشان می‌دهد که رودخانه به دریا رسیده است. در این وضعیت، فرآیند تبخیر اثر می‌کند و همان‌طور که در طبیعت دیده می‌شود، بعد از تبخیر کافی، باران (بارش) شروع خواهد شد.

بعد از تبخیر، جریان‌های جدید در مکان‌های مختلف شکل می‌گیرند (مشابه با جهش در GA)؛ از این رو در جمعیت فرعی جدید ایجاد شده، بهترین جریان به‌عنوان یک رودخانه جدید عمل خواهد کرد و سایر جریان‌ها به سمت رودخانه جدید خود حرکت می‌کنند. این شرایط همچنین برای جریان‌هایی که مستقیماً به سمت دریا حرکت می‌کنند، به کار برده می‌شود. به طریق مشابه، بهترین جریان جدید ایجاد شده به‌عنوان یک رودخانه که به سمت دریا حرکت می‌کند، در نظر گرفته می‌شود. فرض می‌شود که سایر جریان‌های جدید به سمت رودخانه‌ها یا مستقیماً به سمت دریا حرکت می‌کنند. معادله ۱۹، فقط برای جریان‌هایی که مستقیماً به سمت دریا حرکت می‌کنند، استفاده می‌شود. این معادله ایجاد جریان‌هایی را که مستقیماً به سمت دریا می‌روند برای بهبود اکتشاف نزدیک دریا (راه‌حل بهینه) در منطقه امکان‌پذیر برای مسائل محدود، تشویق می‌کند [۱۴].

$$\bar{X}_{Stream}^{t+1} = \bar{X}_{Sea}^t + \sqrt{\mu} \times \text{randn}(1, D), \quad \text{رابطه (۱۹)}$$

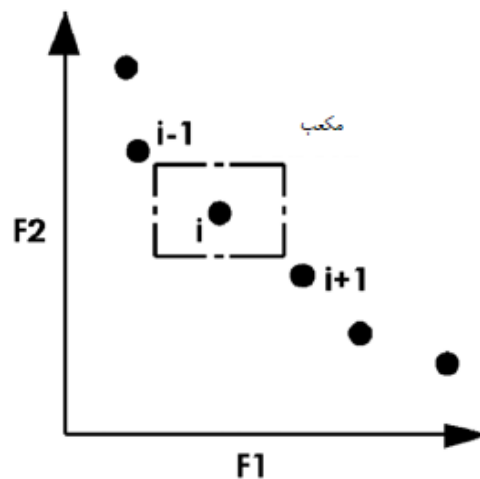
μ ضریبی است که محدوده منطقه جست‌وجو را در نزدیکی دریا نشان می‌دهد، randn یک عدد تصادفی است که به‌طور نرمال توزیع شده است. μ بزرگ‌تر احتمال خروج از منطقه ممکن را افزایش می‌دهد. μ کوچک‌تر، الگوریتم را به یافتن در یک منطقه کوچک‌تر نزدیک دریا، هدایت می‌کند. مقدار مناسب آن ۰/۱ در نظر گرفته می‌شود. در واقع $\sqrt{\mu}$ نشان‌دهنده انحراف استاندارد

است. نقطه به‌وجودآمده با واریانس μ ، نزدیک بهترین نقطه بهینه به‌دست‌آمده (دریا) توزیع شده است؛ بنابراین عامل تبخیر مسئول مرحله اکتشاف در WCA است. مقدار بزرگ برای d_{\max} از جست‌وجوهای اضافی جلوگیری می‌کند و مقادیر کوچک جست‌وجو نزدیک دریا را تشویق می‌کند؛ از این‌رو d_{\max} شدت جست‌وجو نزدیک دریا (راه‌حل بهینه) را کنترل می‌کند. مقدار d_{\max} به شرح زیر در هر مرحله کاهش می‌یابد:

$$d_{\max}^{t+1} = d_{\max}^t - \frac{d_{\max}^t}{Max_Iteration} \quad t = 1, 2, 3, \dots, Max_Iteration \quad , \quad (20) \text{ رابطه}$$

t یک شاخص تکرار است. توسعه فرایند بهینه‌سازی WCA در شکل ۵b نشان داده شده است و در این شکل دایره‌ها، ستاره‌ها و الماس به ترتیب نشان‌دهنده جریان‌ها، رودخانه‌ها و دریا هستند. شکل‌های سفید (خالی) موقعیت‌های جدیدی که توسط جریان‌ها و رودخانه‌ها شکل گرفته است را نشان می‌دهد.

WCA چندهدفه. به‌منظور تبدیل WCA به یک الگوریتم بهینه‌سازی چندهدفه کارا، ویژگی‌های غالب الگوریتم (مثل دریا و رودخانه‌ها) باید به‌درستی تعریف شوند. در مسائل بهینه‌سازی عادی برای WCA، فقط یک تابع هدف باید حداقل یا حداکثر شود. در این شرایط تعدادی از بهترین راه‌حل‌های به‌دست‌آمده به‌عنوان یک دریا (برای مثال بهترین راه‌حل به‌دست‌آمده تاکنون) و رودخانه‌ها در نظر گرفته می‌شود.



شکل ۶. نمایشی شماتیک از محاسبه تراکم فاصله [۱۱، ۱۲]

با وجود این، در MOPها، بیش از یک تابع باید حداکثر (حداقل) شود؛ بنابراین در WCA تعریف برای انتخاب دریا و رودخانه‌ها باید به فضای چندهدفه تغییر یابد. سازوکار تراکم فاصله برای انتخاب کاراترین (بهترین) راه‌حل‌ها در جمعیت به‌عنوان یک دریا و رودخانه‌ها استفاده می‌شود. در ابتدا، دب و همکاران (۲۰۰۲)، سازوکار تراکم فاصله از پارتو را تعریف کردند [۱۲]. این معیار توزیع راه‌حل‌های غیرغالب را در اطراف یک راه‌حل غیرغالب نشان می‌دهد. شکل ۶، نحوه محاسبه تراکم فاصله (یعنی متوسط طول مکعب) برای نقطه i را تشریح می‌کند. مقدار کمتر برای تراکم فاصله نشان‌دهنده توزیع بیشتر راه‌حل‌ها در یک منطقه مشخص است. در MOPها، این پارامتر در فضاهای هدف محاسبه می‌شود؛ از این رو تمام راه‌حل‌های غیرغالب باید بر اساس مقادیر برای یکی از توابع هدف طبقه‌بندی شود. لازم است این پارامترها برای هر یک از راه‌حل‌های غیرغالب محاسبه شود. یک گام ضروری در MOWCA انتخاب دریا و رودخانه‌ها از جمعیت به‌دست‌آمده به‌عنوان بهترین راه‌حل برای سایر راه‌حل‌ها در هر تکرار، است. این امر بر قابلیت همگام‌سازی MOWCA تأثیر می‌گذارد و گسترش خوبی از راه‌حل‌های غیرغالب را حفظ می‌کند.

تراکم فاصله باید برای تمام راه‌حل‌های غیر غالب برای تمام تکرارها محاسبه شود. لازم است تعیین شود کدام راه‌حل‌ها بیشترین مقادیر تراکم فاصله را دارند. بعد از آن، راه‌حل‌های غیرغالب به‌دست‌آمده به‌عنوان دریا و رودخانه‌ها در نظر گرفته می‌شوند و علاوه بر این، شدت جریان رودخانه‌ها و دریا بر مبنای مقادیر تراکم فاصله محاسبه می‌شود. بعضی از راه‌حل‌های غیرغالب به‌احتمال زیاد نزدیک رودخانه‌ها و دریا در تکرار بعد ایجاد می‌شود و مقادیر فاصله آن‌ها از بین می‌رود و کاهش می‌یابد.

بسیار مهم است که راه‌حل‌های غیرغالب در یک آرشیو برای دستیابی به مجموعه‌های جبهه پارتو ذخیره شود. این آرشیو در هر تکرار به‌روز می‌شود و راه‌حل‌های غالب از آرشیو حذف می‌شود؛ بنابراین هر زمان که تعداد اعضا در آرشیو پارتو بزرگ‌تر از اندازه آرشیو پارتو می‌شود، تراکم فاصله برای از بین بردن راه‌حل‌های غیرغالب که کمترین مقادیر تراکم فاصله را در میان اعضای آرشیو پارتو دارند به‌کار برده می‌شود. MOWCA ظرفیت بالایی برای بهره‌برداری در فضای طراحی دارد؛ همان‌طور که بر راه‌حل‌های بهینه نزدیک تمرکز می‌کند و راه‌حل‌های با فاصله زیاد را استخراج می‌کند.

عمدتاً MOWCA با رویکرد بهره‌برداری شروع می‌شود، جریان‌ها به سمت رودخانه حرکت می‌کنند و رودخانه‌ها به سمت دریا؛ با این حال، در تکرار اولیه، این حرکات به‌عنوان یک عامل اکتشافی به‌دلیل تنوع جمعیت اولیه عمل می‌کنند. این روند می‌تواند به‌عنوان پتانسیل

MOWCA برای بافتن طیف وسیعی از فضای طراحی، درحالی‌که بر راه‌حل‌های غیرغالب بهینه نزدیک تمرکز می‌کند، در نظر گرفته شود [۳۸]. بسیاری از MOPها در معرض مجموعه‌ای از محدودیت‌ها (برای مثال، نابرابری، برابری، خطی، غیرخطی و غیره) قرار می‌گیرند؛ بنابراین یافتن استراتژی‌های خوب و ساده برای مدیریت‌کردن محدودیت‌ها و تشخیص راه‌حل‌ها در فضای امکان‌پذیر، مهم است؛ از این رو یک رویکرد ساده در اینجا برای به‌کاربردن MOWCA تعریف شده است. پس از به‌دست‌آوردن مجموعه‌ای از راه‌حل‌ها در هر تکرار، تمام محدودیت‌ها بررسی می‌شود و بعضی از راه‌حل‌ها که در فضای امکان‌پذیر هستند، انتخاب می‌شوند؛ سپس راه‌حل‌های غیرغالب از راه‌حل‌های امکان‌پذیر انتخاب می‌شوند و وارد آرشیو پارتو می‌شوند. سرانجام دریا و رودخانه‌ها از این آرشیو برای تکرار بعدی انتخاب می‌شوند [۳۸].

۴. تحلیل یافته‌ها

مسئله انتخاب سبد سرمایه‌گذاری به دنبال بهترین تخصیص ثروت در میان فرصت‌های سرمایه‌گذاری در یک بازار با دارایی‌های ریسکی است. تعیین سبد سرمایه‌گذاری بهینه بسته به هدف سرمایه‌گذار، یک مسئله نسبتاً پیچیده است؛ بنابراین آن‌ها با یک تابع چندهدفه روبه‌رو می‌شوند. بازده بالا با ریسک بالا همراه است و سرمایه‌گذار باید توازنی بین ریسک و بازدهی که می‌خواهد به‌دست بیاورد را در نظر داشته باشد. هدف اصلی انتخاب سبدی از سرمایه‌گذاری است که بیشترین بازده و کمترین ریسک را به‌همراه داشته باشد.

در این بخش، مجموعه‌ای از تحلیل‌های محاسباتی برای روشن‌شدن عملکرد MOWCA استفاده شده است. در این پژوهش، MOWCA با MOGA و MOPSO مقایسه می‌شود. MOWCA، MOGA و MOPSO در نرم‌افزار برنامه‌نویسی MATLAB کدنویسی شده‌اند و وظیفه بهینه‌سازی در هر آزمایش با استفاده از ۲۰ اجرای مستقل انجام شده است. برای تمام آزمایش‌ها، پارامترهای اولیه برای MOWCA، ۸، ۵۰، و $E-05$ به ترتیب برای N_{SR} ، N_{POP} و d_{max} انتخاب شده است. برای MOPSO و MOGA اندازه جمعیت برای تمامی آزمایش‌ها ۵۰ در نظر گرفته شده است. مقادیر ۰/۷۵ و ۱/۵ به ترتیب برای وزن و ضریب یادگیری در MOPSO استفاده شده است. نرخ‌های متقاطع و جهش در MOGA به ترتیب ۰/۵ و ۰/۱ در نظر گرفته شده است. پارامترهای اولیه استفاده‌شده برای تمام بهینه‌سازهای گزارش‌شده به‌خوبی تنظیم شده و مقادیر اولیه بهینه برای کار بهینه‌سازی با استفاده از تجزیه‌وتحلیل حساسیت انجام می‌شود.

برای داشتن مقایسه‌ای قابل‌اتکا و منصفانه، حداکثر تعداد تابع ارزیابی (NFES) به کار رفته است و اندازه آرشیو پارتو برای تمام MOPها به ترتیب ۱۰۰۰ و ۱۰۰ در نظر گرفته شده است. در واقع، بیشینه NFES به عنوان شرایط توقف که در این مقاله فرض شده است، در نظر گرفته شده است. چهار معیار ارزیابی که به طور گسترده‌ای به کار می‌روند، برای ارزیابی کارایی MOWCA و سایر بهینه‌سازها مورد استفاده قرار گرفته است. هر دو بهینه‌سازها یعنی MOGA و MOPSO در این مقاله، کدگذاری و اجرا شده‌اند.

یک MOP شامل ۳۰ شرکت بزرگ «بورس اوراق بهادار تهران»، برای ارزیابی توانایی MOWCA برای مسائل بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری شامل اطلاعات روزانه از فروردین ۱۳۹۲ تا اسفند ۱۳۹۴ استفاده شده است.

جدول ۱. نتایج بهینه‌سازی الگوریتم‌ها با معیار GD

الگوریتم	بدترین	بهترین	میانگین	انحراف معیار
MOWCA	۰/۰۰۱۳۲۳	۰/۰۰۱۰۰۶	۰/۰۰۱۱۵۴	۰/۰۰۰۰۶۳
MOGA	۰/۰۰۱۰۹۸	۰/۰۰۱۰۱۶	۰/۰۰۱۰۳۲	۰/۰۰۰۰۰۸
MOPSO	۰/۰۰۶۹۹۳	۰/۰۰۵۲۵۹	۰/۰۰۶۰۲۱	۰/۰۰۰۵۴۰

جدول ۲. نتایج بهینه‌سازی الگوریتم‌ها با معیار S

الگوریتم	بدترین	بهترین	میانگین	انحراف معیار
MOWCA	۰/۲۱۲۴۳۲	۰/۱۴۵۶۲۰	۰/۱۶۰۰۲۴	۰/۰۴۵۶۰۳۱
MOGA	۰/۴۱۷۳۴۹	۰/۳۱۵۱۸۶	۰/۳۳۱۸۷۱	۰/۰۷۲۰۱۹
MOPSO	۰/۳۵۷۱۴۵	۰/۲۳۱۵۰۲	۰/۲۸۱۹۵۷	۰/۰۹۸۱۱۴۳

جدول ۳. نتایج بهینه‌سازی الگوریتم‌ها با معیار MS

الگوریتم	بدترین	بهترین	میانگین	انحراف معیار
MOWCA	۰/۷۹۱۳۱۵	۰/۸۳۹۲۸۱	۰/۸۱۰۲۳۵	۰/۰۷۱۵۵۶
MOGA	۰/۷۵۵۰۴۲	۰/۷۷۵۵۸۳	۰/۷۶۶۳۰۲	۰/۰۴۴۱۱۳
MOPSO	۰/۳۵۲۸۱۰	۰/۸۶۲۱۶۳	۰/۶۶۵۴۹۰	۰/۱۱۲۷۷۶

جدول ۴. نتایج بهینه‌سازی الگوریتم‌ها با معیار Δ

الگوریتم	بدترین	بهترین	میانگین	انحراف معیار
MOWCA	۰/۴۱۹۱۳۲	۰/۳۳۳۷۰۵	۰/۳۵۰۵۸۱	۰/۰۷۶۵۳۳
MOGA	۰/۵۷۴۹۶۳	۰/۴۲۷۱۸۹	۰/۵۰۳۱۲۳	۰/۱۰۰۳۳۱
MOPSO	۰/۷۱۴۱۶۶	۰/۳۳۷۶۴۸	۰/۴۸۱۹۲۱	۰/۱۹۰۳۳۸

با توجه به جدول ۱، MOGA توانسته است راه‌حل‌های غیرغالب با حداقل فاصله از PF-optimal (۰/۰۰۱۰۳۲) بیابد و توزیع بهتری در مقایسه با بهینه‌سازهای دیگر است. MOWCA نیز پس از MOGA بهترین همگرایی را با $PF_{optimal}$ (یعنی معیار GD) داشته است؛ بنابراین از نظر معیار GD، الگوریتم ژنتیک دارای بهترین عملکرد و الگوریتم پرندگان دارای ضعیف‌ترین عملکرد است.

مطابق نتایج جدول ۲، با توجه به میانگین معیار یکنواختی (S)، MOWCA دارای بهترین توزیع راه‌حل‌های غیرغالب در مقایسه با سایر روش‌ها است و از توزیع یکنواخت‌تری برخوردار است. از نظر این معیار، الگوریتم ژنتیک بدترین عملکرد را داشته است.

در مورد معیار MS گزارش شده در جدول ۳، میانگین MOWCA از MOGA و MOPSO پیشی گرفته است که حاکی از پوشش بیشتر خط پارتو توسط راه‌حل‌های اکتشافی چرخه آب است. از این نظر بدترین عملکرد متعلق به الگوریتم پرندگان است. بر اساس نتایج ارائه شده در جدول ۴، عملکرد MOWCA از نظر معیار تنوع نیز از دو الگوریتم دیگر بهتر است. از این نظر الگوریتم ژنتیک بدترین عملکرد را دارد.

به‌طور خلاصه، می‌توان نتیجه گرفت که MOWCA با استفاده از سه معیار ارزیابی عملکرد (MS, S, Δ) ، عملکرد بهتری را در یافتن راه‌حل‌های غیرغالب مناسب نزدیک $PF_{optimal}$ نشان داده است. تنها با استفاده از یک معیار یعنی GD الگوریتم ژنتیک بهترین عملکرد را داشته است. در مقایسه الگوریتم ژنتیک و پرندگان نتیجه قطعی حاصل نشد؛ زیرا بر اساس دو معیار الگوریتم ژنتیک (GD و MS) و بر اساس دو معیار دیگر (S و Δ) الگوریتم پرندگان عملکرد بهتری داشته است. از یافته‌های پژوهش می‌توان نتیجه گرفت که حتی در بازارهای واقعی با تعدادی سهام واقعی، مدل سید سرمایه‌گذاری با استفاده از WCA می‌تواند قابل اجرا باشد و به راه‌حل‌های بهینه معقولی منتج شود.

۵. بحث و نتیجه‌گیری

در این پژوهش، مدل انتخاب سید سرمایه‌گذاری که بر مبنای مدل مارکویتز است (با افزودن برخی محدودیت‌های واقعی)، در دستور کار قرار داده شد. نتایج این پژوهش می‌تواند در تبدیل مدل مارکویتز به مدلی کاربردی‌تر راه‌گشا باشد. بدین طریق که برآوردهای پیشنهادی فرایند بهینه‌سازی مارکویتز را مطلوب، عملاً مفید و قابل اجرا در بسیاری از موقعیت‌ها می‌کند.

این مطالعه سعی در به‌کارگیری MOWCA در بهینه‌سازی سید سهام دارد. مفاهیم و ایده‌های اساسی زیربنایی این روش از فرایند چرخه آب در طبیعت الهام گرفته است؛ به‌علاوه عملکرد این الگوریتم با دو الگوریتم رایج در حل مسئله بهینه‌سازی سید سهام، یعنی MOPSO و

MOGA، نیز مقایسه می‌شود؛ بدین منظور از ۴ معیار ارزیابی عملکرد برای مقایسه این سه الگوریتم بهره گرفته می‌شود که عبارت‌اند از: معیار فاصله از پارتو، فاصله بین راه‌حل‌ها، پوشش و معیار تنوع. نمونه پژوهش شامل اطلاعات روزانه ۳۰ شرکت بزرگ «بورس اوراق بهادار تهران» طی سال‌های ۱۳۹۲ تا ۱۳۹۴ است.

نتایج بهینه‌سازی آماری حاصل از معیارهای عملکرد نشان داده است که MOWCA، قادر به ارائه راه‌حل‌های غیرغالب نزدیک به بهینه پارتو بوده و راه‌حل‌های بهتری در مقایسه با MOGA و MOPSO، تولید کرده است. این نتایج با نتایج مرادی و همکاران (۲۰۱۷) که در چهار بورس بزرگ بین‌المللی انجام شده است، تطابق دارد [۳۴].

پیشنهادهای یافته‌های این پژوهش می‌تواند در تبدیل مدل مارکوئیتز به مدلی کاربردی‌تر راه‌گشا باشد؛ به‌علاوه نتایج بهینه‌سازی به‌دست‌آمده در این مقاله نشان می‌دهد که MOWCA می‌تواند به‌عنوان یک بهینه‌ساز چندهدفه با دقت بالا برای یافتن جبهه بهینه پارتو در مقیاس‌های مختلفی از مسائل بهینه‌سازی چندهدفه سبد سرمایه‌گذاری، مورد استفاده قرار گیرد. مدیران مالی می‌توانند در انتخاب سبد سرمایه‌گذاری بهینه از الگوریتم چرخه آب بهره بگیرند.

برای مطالعات آتی برخی از حوزه‌های پژوهش به شرح زیر پیشنهاد می‌شوند:

(۱) در نظر گرفتن سایر محدودیت‌های یک بازار واقعی مانند هزینه‌های معامله؛

(۲) مقایسه الگوریتم چرخه آب با سایر الگوریتم‌ها، نظیر الگوریتم مورچگان؛

(۳) استفاده از سایر معیارهای ریسک مانند نیمه واریانس و میانگین انحراف مطلق برای بررسی

کارایی MOWCA.

منابع

1. Abbasi, Ebrahim, Abvali, Mehdi and Sarbazi, Mehdi. (2012). Stock portfolio selection by GA. *Financial engineering and securities management*, 10: 23-38 (In Persian).
2. Ali, M. M., & Kaelo, P. (2008). Improved particle swarm algorithms for global optimization. *Applied Mathematics and Computation*, 196: 578-593.
3. Bayat, Ali and Asadi, Lida. (2017). Stock portfolio optimization: PSO and Markowitz, Model. *Financial engineering and securities management*, 32: 64-85 (In Persian).
4. Bermúdez, J. D., Segura, J. V., & Vercher, E. (2012). A multi-objective genetic algorithm for cardinality constrained fuzzy portfolio selection. *Fuzzy Sets and Systems*, 188: 16-26.
5. Chang, T.-J., Meade, N., Beasley, J. E., & Sharaiha, Y. M. (2000). Heuristics for cardinality constrained portfolio optimization. *Computers & Operations Research*, 27: 1271-1302.
6. Chang, T.-J., Sang-Chin, Y., & Chang, K.-J. (2009). Portfolio optimization problems in different risk measures using genetic algorithm. *Expert Systems with Applications*, 36: 10529-10537.
7. Chen, W. (2015). Artificial bee colony algorithm for constrained possibilistic portfolio optimization problem. *Physica A*, 429: 125-139.
8. Coello, C. A. C. (2000). An updated survey of GA-based multi-objective optimization techniques. *ACM Computing Surveys*, 32: 109-143.
9. Corazza, M., Fasano, G., & Gusso, R. (2013). Particle swarm optimization with non-smooth penalty reformulation, for a complex portfolio selection problem. *Applied Mathematics Computing*, 224: 611-624.
10. Crama, Y., & Schyns, M. (2003). Simulated annealing for complex portfolio selection problems. *European Journal of Operational Research*, 150: 546-571.
11. Deb, K. (2001). *Multi-objective optimization using evolutionary algorithms*. Chichester: Wiley.
12. Deb, K., Pratap, A., Agarwal, S., & Meyarivan, T. (2002). A fast and elitist multi objective genetic algorithm: NSGA-II. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 6: 182-197.
13. Deng, G.-F., Lin, W.-T., & Lo, C.-C. (2012). Markowitz-based portfolio selection with cardinality constraints using improved particle swarm optimization. *Expert Systems with Applications*, 39: 4558-4566.
14. Eskandar, H., Sadollah, A., Bahreininejad, A., & Hamdi, M. (2012). Water cycle algorithm – A novel metaheuristic optimization method for solving constrained engineering optimization problems. *Computers & Structures*, 110-111: 151-166.
15. Goldberg, D. (1989). *Genetic algorithms in search, optimization and machine learning*. Reading, MA: Addison-Wesley.
16. Golmakani, H. R., & Fazel, M. (2011). Constrained portfolio selection using particle swarm optimization. *Expert Systems with Applications*, 38: 8327-8335.
17. Haupt, R. L., & Haupt, S. E. (2004). *Practical genetic algorithms* (2nd ed.). USA: John Wiley & Sons Inc.
18. Holland, J. H. (1975). *Adaptation in natural and artificial systems: An introductory analysis with applications to biology, control, and artificial intelligence*. Michigan: University of Michigan Press.

19. Jiang, Y., Hu, T., Huang, C., & Wu, X. (2007). An improved particle swarm optimization algorithm. *Applied Mathematics and Computation*, 193: 231-239.
20. Kaveh, A., & Laknejadi, K. (2011). A novel hybrid charge system search and particle swarm optimization method for multi-objective optimization. *Expert Systems with Applications*, 20: 1-14.
21. Kennedy, J., & Eberhart, R. (1995). Particle swarm optimization, in Proc. of the IEEE international conference on neural networks, Perth, Australia, 1942-1948.
22. Kennedy, J., Eberhart, R. C., & Shi, Y. (2001). *Swarm intelligence*. San Francisco, CA: Kaufmann.
23. Kolm, P. N., Tütüncü, R., & Fabozzi, F. J. (2013). 60 Years of portfolio optimization: Practical challenges and current trends. *European Journal of Operational Research*, 236: 258-267.
24. Kyong, J. O., Tae, Y. K., & Sungky, M. (2005). Using genetic algorithm to support portfolio optimization for index fund management. *Expert Systems with Applications*, 28: 371-379.
25. Li, X. (2003, July). A non-dominated sorting particle swarm optimizer for multiobjective optimization. In E. Cantu-Paz, J. A. Foster, K. Deb, L. D. Davis, R. Roy, U.-M. O'Reilly, A. C. Schultz (Eds.), *Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference (GECCO'2003)*, 2723: 37-48. Madrid: Springer, Lecture Notes in Computer Science.
26. Li, J., & Xu, J. (2007). A class of possibilistic portfolio selection model with interval coefficients and its application. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 6: 123-137.
27. Lin, C.-C., & Liu, Y.-T. (2008). Genetic algorithms for portfolio selection problems with minimum transaction lots. *European Journal of Operational Research*, 185: 393-404.
28. Lin, Chi-Ming, and Gen, M. (2007) An Effective Decision-Based Genetic Algorithm Approach to Multiobjective Portfolio Optimization Problem, *Applied Mathematical sciences*, 1(5): 201-210.
29. Liu, Y., Wu, X., & Hao, F. (2012). A new chance-variance optimization criterion for portfolio selection in uncertain decision systems. *Expert Systems with Applications*, 39: 6514-6526.
30. Maringer, D., & Kellerer, H. (2003). Optimization of cardinality constrained portfolios with a hybrid local search algorithm. *OR Spectrum*, 25: 481-495.
31. Markowitz, H. M. (1952). Portfolio selection. *Journal of Finance*, 7: 77-91.
32. Markowitz, H. M. (1991). *Portfolio selection: Efficient diversification of investments*. New York, NY: Yale University Press, John Wiley.
33. Melanie, M., (1999). *An Introduction to Genetic Algorithms*, A Bradford Book The MIT Press Cambridge, Massachusetts-London, England, Fifth Printing.
34. Moradi, Mohammad, Sadollah, Ali, Eskandar, Hoda and Eskandar, Hadi. (2017). the application of water cycle algorithm to portfolio selection. *Economic Research*, 30(1): 1277-1299.
35. Najafi, A. A., & Mushakhian, S. (2015). Multi-stage stochastic mean-semivariance-CVaR portfolio optimization under transaction costs. *Applied Mathematics Computing*, 256: 445-458.
36. Ruiz-Torrubiano, R., & Suarez, A. (2010). Hybrid approaches and dimensionality reduction for portfolio selection with cardinality constraints. *IEEE Computational Intelligence Magazine*, 5: 92-107.

37. Sadollah, A., Eskandar, H., Kim, J. H., & Bahreinejad, A. (2014). Water cycle algorithm for solving multi-objective optimization problems. *Soft Computing*, 19: 2587-2603. doi:10.1007/s00500-014-1424-4.
38. Sadollah, A., Eskandar, H., & Kim, J. H. (2015). Water cycle algorithm for solving constrained multiobjective optimization problems. *Applied Soft Computing*, 27: 279-298.
39. Schott, J. R. (1995). *Fault tolerant design using single and multicriteria genetic algorithm optimization* (Master's thesis), Department of Aeronautics and Astronautics, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA.
40. Soleimani, H., Golmakani, H. R., & Salimi, M. H. (2009). Markowitz-based portfolio selection with minimum transaction lots, cardinality constraints and regarding sector capitalization using genetic algorithm. *Expert Systems with Applications*, 36: 5058-5063.
41. Tsai, S.-J., Sun, T.-Y., Liu, C.-C., Hsieh, S.-T., Wu, W.-C., & Chiu, S.-Y. (2010). An improved multiobjective particle swarm optimizer for multi-objective problems. *Expert Systems with Applications*, 37: 5872-5886.
42. Veldhuizen, D. A. V., & Lamont, G. B. (1998). *Multi-objective evolutionary algorithm research: A history and analysis*. Technical Report TR-98-03, Department of Electrical and Computer Engineering, Graduate School of Engineering, Air Force Institute of Technology, Wright-Patterson AFB, OH.
43. Woodside-Oriakhi, M., Lucas, C., & Beasley, J. E. (2011). Heuristic algorithms for the cardinality, constrained efficient frontier. *European Journal of Operational Research*, 213: 538-550.
44. Yang, X., Yuan, J., Yuan, J., & Mao, H. (2007). A modified particle swarm optimizer with dynamic adaptation. *Applied Mathematics and Computation*, 189: 1205-1213.
45. Zhu, H., Wang, Y., Wang, K., & Chen, Y. (2011). Particle Swarm Optimization (PSO) for the constrained portfolio optimization problem. *Expert Systems with Applications*, 38: 10161-10169.