Fin. Manag. Persp. 2026, 16(2), 112-138; DOI: 10.48308/jfmp.2026.245330.1615

Financial Management Perspective
Journal homepage: https://jfmp.sbu.ac.ir/

Original Article

Joint Forecasting of Value at Risk and Expected Shortfall in the Cryptocurrency Market: A Semiparametric Approach Based on the CAViaR–CARE Model

Reza Mohamadipour Nodoushan*
Reza Raei**
Saeid Fallahpour***

Abstract

Objective: Cryptocurrency returns exhibit heavy tails, strong volatility clustering, and sudden, asymmetric jumps and crashes, making tail risk difficult to measure in this market. Value at Risk (VaR) indicates only the loss threshold that is exceeded with a given probability, whereas Expected Shortfall (ES) also quantifies the magnitude of losses beyond that threshold. Because ES can be evaluated only jointly with VaR, the two are best forecast together. This study evaluates and compares the performance of the semiparametric CAViaR–CARE model, in which VaR and ES are estimated jointly using the asymmetric Laplace distribution, in the cryptocurrency market. The central question is whether combining CAViaR dynamics for VaR with a CARE structure for ES can provide a competitive and credible framework for measuring tail risk in a market marked by extreme volatility, heavy tails, and volatility clustering.

Method: The data consist of daily returns on six selected cryptocurrencies (Bitcoin, Ethereum, Ripple, Litecoin, Binance Coin, and Cardano) from early January 2018 to early January 2026, yielding 2,925 observations per asset. VaR follows an asymmetric-slope CAViaR process that responds separately to positive and negative returns. ES follows its own autoregressive path, and all parameters are estimated in one step by maximizing the asymmetric Laplace quasi-likelihood. Using a 1,825-day rolling window, we produce 1,100 one-day-ahead forecasts at the 1% and 5% risk levels and compare them with historical simulation (HS), filtered historical simulation (FHS), GARCH-t, GJR-GARCH, GARCH-EVT and the model of Taylor (2019). The Kupiec,

Received: 5,June,2026 Accepted: 22,September,2026
* Ph.D. Candidate in Finance, Department of Financial Markets and Institutions, Faculty of Accounting and Finance, College of Management, University of Tehran, Tehran, Iran (**Corresponding Author**). E-mail: R.mohammadipour@ut.ac.ir
** Professor, Department of Financial Markets and Institutions, Faculty of Accounting and Finance, College of Management, University of Tehran, Tehran, Iran.
*** Associate Professor, Department of Financial Engineering, Faculty of Accounting and Finance, College of Management, University of Tehran, Tehran, Iran.

Christoffersen, dynamic quantile, and McNeil–Frey backtests assess forecast adequacy; the asymmetric Laplace (AL), Fissler–Ziegel (FZ), and Acerbi–Szekely (AS) scoring functions rank the models; and the Diebold–Mariano (DM) test and the model confidence set (MCS) identify which differences are statistically reliable. We also separately examine how the length of the estimation window, ranging from 1,100 to 2,200 days, affects the results.

Findings: The descriptive statistics show high volatility, heavy tails, and asymmetric behavior in the returns of all six cryptocurrencies, indicating the need for dynamic, tail-focused models in this market. In the backtests, CAViaR–CARE is the only model that passes the Kupiec test across all twelve asset–risk level combinations. Its violation rate lies between 1.00% and 1.55% at the 1% level and between 4.82% and 5.55% at the 5% level. It passes 28 of 30 backtests at the 1% level and 29 of 30 at the 5% level. By contrast, the GARCH-type models, FHS, and HS are clearly too conservative at the 5% level. CAViaR–CARE also has the lowest average loss under all three scoring functions and, like Taylor's model, remains in the MCS for every asset and every criterion, while HS drops out of the set in 19 of 36 cases. That said, most of its differences from FHS, GARCH-EVT, and Taylor's model at the 1% level are not statistically significant, although no competitor is significantly better in any of the 216 DM comparisons. When the window length changes, its violation rate stays between 1.26% and 1.40% at the 1% level and between 5.01% and 5.17% at the 5% level, and it stays in the MCS in 143 of 144 cases, but its first place in the rankings does not survive every window length.

Conclusion: The results suggest that CAViaR–CARE can serve as a dynamic, semiparametric, and credible framework for jointly forecasting VaR and ES in cryptocurrency markets. However, no model examined is uniformly superior across all assets and tests; performance varies by asset, risk level, and evaluation criterion. Its main strength is stable coverage close to the nominal level, which matters when VaR is used to set margins or trading limits, because an overly conservative model ties up more capital than needed. For practitioners, the message is that backtesting should be combined with joint, consistent scoring functions, and that the best-performing models, when they are statistically indistinguishable, are better used together as a set than replaced by a single “winner.”

Keywords: Value at Risk; Asymmetric Laplace Distribution; Expected Shortfall; Cryptocurrencies; Semiparametric Risk Measurement; CAViaR–CARE

***How to Cite**: Mohamadipour Nodoushan, R., Raei, R., & Fallahpour, S. (2026). Joint forecasting of value at risk and expected shortfall in the cryptocurrency market: A semiparametric approach based on the CAViaR–CARE model. Financial Management Perspective, 16(2), 112-138 .(in Persian)*

Copyright: © 2026 by the authors. Submitted for possible open access publication under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

چشم انداز مدیریت مالی ۱۴۰۵ دوره ۱۶ شماره ۲، صص ۱۱۲ –۱۳۸، DOI: 10.48308/jfmp.2026.245330.1615

چشم انداز مدیریت مالی
Journal homepage: https://jfmp.sbu.ac.ir/

نوع مقاله: پژوهشی

پیش‌بینی مشترک ارزش در معرض ریسک و ریزش مورد انتظار در بازار رمزارزها: رویکردی نیمه‌پارامتریک مبتنی بر مدل CAViaR–CARE

رضا محمدی‌پور ندوشن *
رضا راعی **
سعید فلاح‌پور ***

چکیده

هدف: بازده رمزارزها خصوصیاتی همچون دنباله‌های سنگین، خوشه‌بندی شدید نوسانات، جهش‌ها و ریزش‌های ناگهانی و نامتقارن دارد و همین ویژگی‌ها سنجش ریسک دنباله‌ای را در این بازار دشوار می‌کند. ارزش در معرض ریسک (VaR) فقط آستانه‌ای را نشان می‌دهد که زیان با احتمالی معین از آن فراتر می‌رود، اما ریزش مورد انتظار (ES) اندازه زیان‌های فراتر از این آستانه را نیز می‌سنجد. از آنجا که ES فقط همراه با VaR سنجش‌پذیر است، بهتر است این دو معیار با هم پیش‌بینی شوند. هدف این پژوهش ارزیابی و مقایسه عملکرد مدل نیمه‌پارامتریک CAViaR–CARE در پیش‌بینی مشترک VaR و ES با استفاده از توزیع لاپلاس نامتقارن در بازار رمزارزهاست. تمرکز اصلی این مطالعه بر این پرسش استوار است که آیا ترکیب پویایی CAViaR برای مدل‌سازی VaR و ساختار CARE برای مدل‌سازی ES می‌تواند در بازاری با نوسان شدید، دنباله‌های سنگین و خوشه‌بندی نوسانات، چارچوبی رقابتی و قابل‌قبول برای سنجش ریسک دنباله‌ای ارائه دهد؟

روش: ابتدا داده‌های پژوهش شامل بازده روزانه شش رمزارز منتخب، شامل بیت‌کوین، اتریوم، ریپل، لایت‌کوین، بایننس‌کوین و کاردانو، از ابتدای ژانویه ۲۰۱۸ تا ابتدای ژانویه ۲۰۲۶ (۲۹۲۵ مشاهده برای هر دارایی) جمع‌آوری شده است. در مدل پژوهش، VaR با مشخصه شیب نامتقارن CAViaR و ES با یک مسیر خودرگرسیو مستقل مدل‌سازی می‌شود و همه پارامترها در یک مرحله و با بیشینه‌سازی شبه‌درست‌نمایی لاپلاس نامتقارن برآورد می‌شوند. سپس با پنجره غلتان ۱۸۲۵ روزه، ۱۱۰۰ پیش‌بینی یک‌روزه در سطوح ریسک ۱ و ۵ درصد تولید و با شبیه‌سازی تاریخی (HS)، شبیه‌سازی تاریخی فیلترشده GARCH– (FHS)،

تاریخ دریافت: ۱۴۰۵/۰۳/۱۵ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۵/۰۶/۳۱

* دانشجوی دکتری مالی، گروه بازارها و نهادهای مالی، دانشکده حسابداری و علوم مالی، دانشکدگان مدیریت، دانشگاه تهران، تهران، ایران (**نویسنده مسئول**).
E-Mail: R.mohammadipour@ut.ac.ir
** استاد، گروه بازارها و نهادهای مالی، دانشکده حسابداری و علوم مالی، دانشکدگان مدیریت، دانشگاه تهران، تهران، ایران
*** دانشیار، گروه مهندسی مالی، دانشکده حسابداری و علوم مالی، دانشکدگان مدیریت، دانشگاه تهران، تهران، ایران

t، GJR–GARCH، GARCH–EVT و مدل تیلور ۲۰۱۹ (Taylor, 2019) مقایسه شده است. آزمون‌های پس‌آزمایی کوپیک، کریستوفرسن، چندک پویا و مک‌نیل–فری کفایت پیش‌بینی‌ها را می‌سنجند، توابع امتیازدهی AL، فیسلر–زیگل (FZ) و آسربی–سکلی (AS) مدل‌ها را رتبه‌بندی می‌کنند و آزمون دیبولد–ماریانو (DM) و مجموعه اطمینان مدل (MCS) نشان می‌دهند کدام تفاوت‌ها از نظر آماری قابل اتکاست. اثر طول پنجره (۱۱۰۰ تا ۲۲۰۰ روز) نیز جداگانه بررسی شده است.

یافته‌ها: آمار توصیفی بازده رمزارزهای منتخب بیانگر نوسانات بالا، دنباله‌های سنگین و رفتار نامتقارن است، در نتیجه استفاده از مدل‌های پویا و دنباله‌محور برای سنجش ریسک در این بازار ضرورت دارد. نتایج پس‌آزمایی نشان می‌دهد CAViaR–CARE تنها مدلی است که آزمون کوپیک را در هر دوازده ترکیب دارایی و سطح ریسک پشت سر می‌گذارد و نرخ نقض آن در سطح ۱ درصد بین ۱٫۰۰ و ۱٫۵۵ درصد و در سطح ۵ درصد نیز بین ۴٫۸۲ و ۵٫۵۵ درصد قرار دارد؛ در مقابل، مدل‌های خانواده گارچ، FHS و HS در سطح ۵ درصد به‌طور آشکار بیش از حد محافظه‌کارند. این مدل در هر سه تابع امتیازدهی کمترین میانگین زیان را دارد و مانند مدل تیلور، در همه دارایی‌ها و معیارها در MCS باقی می‌ماند، در حالی که HS در ۱۹ مورد از ۳۶ مورد از این مجموعه حذف می‌شود. با این حال، بیشتر تفاوت‌های آن با FHS، GARCH–EVT و مدل تیلور در سطح ۱ درصد از نظر آماری معنادار نیست، هرچند در هیچ‌یک از ۲۱۶ مقایسه DM مدل رقیب به‌طور معنادار بهتر از آن نیست. با تغییر طول پنجره، نرخ نقض این مدل در سطح ۱ درصد بین ۱٫۲۶ و ۱٫۴۰ درصد و در سطح ۵ درصد بین ۵٫۰۱ و ۵٫۱۷ درصد باقی می‌ماند و در ۱۴۳ مورد از ۱۴۴ ترکیب در MCS حضور دارد، اما رتبه نخست آن در همه پنجره‌ها حفظ نمی‌شود. HS در همه معیارها ضعیف‌ترین مدل است.

نتیجه‌گیری: این مطالعه نشان می‌دهد که مدل CAViaR–CARE می‌تواند چارچوبی پویا، نیمه‌پارامتریک و قابل‌قبول برای پیش‌بینی مشترک VaR و ES در بازار رمزارزها باشد. با این حال، نتایج بیانگر این موضوع است که هیچ‌کدام از مدل‌های مورد بررسی برتری مطلق و یکنواخت در همه دارایی‌ها و آزمون‌ها ندارند. در واقع عملکرد مدل‌ها به نوع دارایی، سطح ریسک و معیار ارزیابی وابسته است. مهم‌ترین مزیت این مدل پوشش پایدار و نزدیک به سطح اسمی است که در تعیین وجه تضمین و حد معاملاتی اهمیت دارد. از منظر کاربردی، مدیران ریسک بهتر است پس‌آزمایی را با توابع امتیازدهی مشترک و سازگار همراه کنند و مدل‌های برتر هم‌تراز را به‌عنوان یک مجموعه به کار گیرند

کلیدواژه‌ها: ارزش در معرض ریسک؛ توزیع لاپلاس نامتقارن؛ ریزش مورد انتظار؛ رمزارزها؛ سنجش ریسک نیمه‌پارامتریک؛ CAViaR–CARE

استناد دهی: محمدی‌پور ندوشن، رضا؛ راعی، رضا و فلاح‌پور، سعید (۱۴۰۵). پیش‌بینی مشترک ارزش در معرض ریسک و ریزش مورد انتظار در بازار رمزارزها: رویکردی نیمه‌پارامتریک مبتنی بر مدل CAViaR–CARE. چشم‌انداز مدیریت مالی، ۱۶(۲)، ۱۱۲–۱۳۸.

Copyright: © 2026 by the authors. Submitted for possible open access publication under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

۱. مقدمه

بازار رمزارزها به دلیل نوسان‌های شدید، تغییرات سریع در نقدشوندگی، فعالیت پیوسته، حساسیت بالا به اخبار و پیشرفت‌های فناورانه، و وقوع جهش‌ها و ریزش‌های ناگهانی، و عدم وجود نهاد ناظر محیطی دشوار نسبت به بازارهای مالی سنتی برای سنجش ریسک ایجاد کرده است. اثر این ویژگی‌ها در داده‌های همین پژوهش به‌روشنی دیده می‌شود به طوری که بیت‌کوین در یک روز بیش از ۴۳ درصد و باینس‌کوین بیش از ۵۷ درصد از ارزش خود را از دست داده‌اند و کشیدگی بازده روزانه در شش رمزارز مورد بررسی بین ۱۱ و ۴۲ است. در چنین بازاری، برآورد درست زیان‌های شدید برای صرافی‌ها، صندوق‌ها، معامله‌گران و نهادهای ناظر یک نیاز حیاتی است؛ کمیته نظارت بانکی بازل[1] (Basel Committee on Banking Supervision, 2022) نیز با تدوین استانداردی جداگانه برای الزامات سرمایه در برابر دارایی‌های رمزپایه، بر اهمیت سنجش دقیق ریسک این دارایی‌ها تأکید کرده است.

ارزش در معرض ریسک (VaR)[2] یکی از رایج‌ترین معیارهای سنجش ریسک است، اما فقط آستانه‌ای را نشان می‌دهد که احتمال عبور زیان از آن برابر با سطح ریسک مشخص است و در مورد شدت زیان‌های فراتر از آن آستانه اطلاعاتی ارائه نمی‌کند. افزون بر این، VaR از بعد نظری نیز در برخی شرایط با محدودیت‌هایی مانند عدم زیرجمع‌پذیری[3] روبه‌روست و از این رو همواره معیار منسجم ریسک محسوب نمی‌شود (Artzner et al., 1999). در این راستا، برای پوشش کاستی‌های VaR، ریزش مورد انتظار[4] (ES) مطرح می‌شود. ES میانگین زیان‌های تحقق‌یافته در ناحیه فراتر از VaR را اندازه‌گیری می‌کند که علاوه بر احتمال وقوع زیان شدید، شدت زیان را نیز در نظر می‌گیرد. به همین دلیل کمیته نظارت بانکی بازل (Basel Committee on Banking Supervision, 2019) نیز در چارچوب جدید ریسک بازار، ES را جایگزین VaR کرده است. چالش کار آنجاست که ES به‌تنهایی سنجش‌پذیر نیست (Gneiting, 2011)، اما زوج VaR و ES به‌صورت مشترک سنجش‌پذیر است (Fissler & Ziegel, 2016).

مدل‌های متعارف سنجش ریسک، از جمله شبیه‌سازی تاریخی[5]، شبیه‌سازی تاریخی فیلترشده[6]، مدل‌های خانواده گارچ[7] (GARCH) و رویکردهای مبتنی بر نظریه ارزش فرین[8] (EVT)، جهت پیش‌بینی VaR و ES توسعه یافته‌اند اما هر یک از این مدل‌ها کاستی‌هایی در سنجش ریسک دارند. روش‌های شبیه‌سازی تاریخی عموماً نسبت به تغییر شرایط بازار دیر واکنش نشان می‌دهند، مدل‌های گارچ به فرض‌هایی درباره توزیع نوآوری‌ها[9] وابسته‌اند و نتایج EVT به انتخاب آستانه و تعداد مشاهدات دنباله حساس است. این محدودیت‌ها ضرورت استفاده از رویکرد نیمه‌پارامتریک را برجسته می‌کند که به‌جای مدل‌سازی کل توزیع بازده، چندک شرطی و میانگین دنباله را مستقیماً مدل‌سازی می‌کند.

در این زمینه، مدل خودرگرسیو شرطی ارزش در معرض ریسک (CAViaR)[10] انگل و مانگانلی (Engle & Manganelli, 2004) به دلیل مدل‌سازی مستقیم چندک شرطی، ساختاری مناسب برای پیش‌بینی پویای VaR فراهم می‌کند. از سویی دیگر، مدل خودرگرسیو شرطی اکسپکتایل‌ها (CARE)[11] تیلور (Taylor, 2008) نشان داد که کمیت‌های مرتبط با ES را نیز می‌توان به شکل خودرگرسیو پویا کرد. تیلور (Taylor, 2019) با بهره‌گیری از توزیع

1. Basel Committee on Banking Supervision
2. Value at Risk (VaR)
3. Lack of Subadditivity
4. Expected Shortfall
5. Historical Simulation (HS)
6. Filtered Historical Simulation (FHS)
7. Generalized AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity (GARCH)
8. Extreme Value Theory (EVT)
9. Inovations
10. Conditional Autoregressive Value at Risk (CAViaR)
11. Conditional Autoregressive Expectiles (CARE)

لاپلاس نامتقارن (AL)[1]، برآورد مشترک VaR و ES را در قالب یک شبه‌درست‌نمایی[2] ممکن ساخت و پاتون و همکاران (Patton et al., 2019) خانواده‌ای از مدل‌های پویای نیمه‌پارامتریک را بر پایه توابع زیان سازگار معرفی کردند. بنابراین ایده برآورد مشترک، تازه نیست. مدل مورد استفاده در این پژوهش نیز در همین چارچوب قرار دارد، VaR با مشخصه شیب نامتقارن CAViaR و ES با یک مسیر خودرگرسیو جداگانه، الهام‌گرفته از ساختار CARE، مدل‌سازی می‌شود و پارامترهای هر دو معادله به‌طور هم‌زمان با تابع درست‌نمایی لاپلاس نامتقارن برآورد می‌شوند. این ترکیب را در ادامه CAViaR–CARE می‌نامیم.

پرسش اصلی این است که آیا رویکرد CAViaR–CARE در بازار رمزارزها، در مقایسه با مدل‌های تاریخی، پارامتریک و نیمه‌پارامتریک رایج، عملکردی رقابتی و از نظر آماری قابل‌قبول در پیش‌بینی مشترک VaR و ES ارائه می‌دهد؟ بیشتر شواهد درباره مدل‌های مشترک VaR و ES از شاخص‌های سهام به دست آمده است. در بازار رمزارزها، ماسیل (Maciel, 2021) و تروچیوس و تیلور (Trucíos & Taylor, 2023) روش‌های گوناگون پیش‌بینی VaR و ES را مقایسه کرده‌اند و گائو و همکاران (Gao et al., 2022) مدل CAViaR با تغییر رژیم را برای برآورد مشترک VaR و ES بیت‌کوین به کار برده‌اند، اما کار اخیر به یک دارایی و عمدتاً به سطح ریسک ۵ درصد محدود است. هنوز روشن نیست که یک مدل مشترک نیمه‌پارامتریک، وقتی هم‌زمان با پس‌آزمایی، توابع امتیازدهی سازگار و آزمون‌های آماری مقایسه‌ای سنجیده شود، در چند رمزارز و در هر دو سطح ۱ و ۵ درصد پیش‌بینی قابل اتکایی ارائه می‌دهد یا نه، و این داوری تا چه حد به طول پنجره برآورد وابسته است.

انتخاب بازار رمزارزها به این دلیل است ویژگی‌های آماری این بازار دقیقاً همان نقاطی است که ساختار CAViaR–CARE برای پاسخ به آن‌ها طراحی شده است. نخست، دنباله‌های بسیار سنگین اتکا به یک توزیع پارامتریک برای کل بازده را با چالش همراه می‌کند اما مدل چندکی این فرض را کنار می‌گذارد و مستقیماً دنباله چپ را هدف می‌گیرد. دوم، خوشه‌بندی شدید نوسان ایجاب می‌کند که VaR و ES از روزی به روز دیگر به‌روز شوند و ساختار خودرگرسیو هر دو معادله همین نقش را دارد. سوم، در رمزارزها هم جهش‌های مثبت و هم ریزش‌ها، ریسک روز بعد را بالا می‌برند، اما نه به یک اندازه در این خصوص مشخصه شیب نامتقارن اثر بازده مثبت و منفی را با ضرایب جداگانه برآورد می‌کند. چهارم، پویایی ES لزوماً با پویایی VaR یکسان نیست و به همین دلیل ES با مسیری مستقل مدل‌سازی می‌شود.

سهم این پژوهش در دانش‌افزایی به ادبیات موضوع در چند محور قابل بیان است. نخست، این مطالعه عملکرد مدل CAViaR–CARE را برای پیش‌بینی مشترک VaR و ES در بازار رمزارزها در دو سطح ریسک و در برابر شش مدل رقیب مورد بررسی قرار می‌دهد. دوم، ارزیابی پیش‌بینی‌ها به VaR محدود نمی‌شود و کیفیت پیش‌بینی مشترک VaR و ES را با استفاده از معیارهای AL، FZ و AS بررسی می‌گردد. سوم، ارزیابی به‌صورت یکپارچه انجام می‌شود به این صورت که نتایج پس‌آزمایی، سه تابع امتیازدهی سازگار، آزمون دیبولد–ماریانو (DM) و مجموعه اطمینان مدل (MCS) کنار هم تفسیر می‌شوند تا مشخص شود کدام تفاوت‌ها از نظر آماری قابل اتکا هستند.

۲. مبانی نظری و پیشینه پژوهش

از VaR به ES و مسئله ارزیابی: VaR به دلیل سادگی تفسیر و امکان پس‌آزمایی مستقیم به معیار رایج نهادهای مالی تبدیل شد (Jorion, 2007). اما آرتزنر و همکاران (Artzner et al., 1999) نشان دادند که VaR شرط زیرجمع‌پذیری[3] را همیشه برقرار نمی‌کند و آسربی و تاشه (Acerbi & Tasche, 2002) و راکافلر و اوریاسف

1. Asymmetric Laplace (AL)
2. Quasi-likelihood
3. Subadditivity

(Rockafellar & Uryasev, 2002) ES را به‌عنوان معیاری منسجم و قابل استفاده در بهینه‌سازی پرتفوی معرفی کردند. این برتری نظری هزینه‌ای هم داشت. گنیتینگ (Gneiting, 2011) نشان داد که ES سنجش‌پذیر نیست؛ یعنی تابع زیانی وجود ندارد که میانگین آن فقط در ES واقعی کمینه شود. در نتیجه، مقایسه پیش‌بینی‌های ES به‌تنهایی از پایه با مشکل روبه‌رو بود. این گره را فیسلر و زیگل (Fissler & Ziegel, 2016) گشودند. آنها نشان دادند که زوج VaR و ES به‌طور مشترک سنجش‌پذیر است و خانواده‌ای از توابع امتیازدهی سازگار برای آن وجود دارد. نولده و زیگل (Nolde & Ziegel, 2017) بر همین اساس پیشنهاد کردند که در کنار پس‌آزمایی سنتی، مدل‌ها با توابع امتیازدهی سازگار با یکدیگر مقایسه شوند. این نتیجه نظری، هم شیوه برآورد و هم شیوه ارزیابی مدل‌های ریسک را تغییر داد.

تحول مدل‌ها: از برآورد دومرحله‌ای تا برآورد مشترک: در نسل نخست مدل‌ها، ابتدا توزیع شرطی بازده مدل‌سازی و سپس VaR و ES از آن استخراج می‌شود. مدل GARCH بولرسلف (Bollerslev, 1986) و مدل GJR-GARCH گلوستن و همکاران (Glosten et al., 1993) پویایی نوسان و اثر نامتقارن شوک‌ها را توضیح می‌دهند و مک‌نیل و فری (McNeil & Frey, 2000) با ترکیب فیلتر گارچ و نظریه ارزش فرین، دنباله باقیمانده‌های استانداردشده را جداگانه برآورد کردند. در این رویکرد، ES محصول جانبی توزیع فرض‌شده است و دقت آن به درستی همان فرض بستگی دارد.

نسل دوم، به‌جای کل توزیع، مستقیماً کمیت ریسک را مدل‌سازی می‌کند. رگرسیون چندکی کوئنکر و بَسِت (Koenker & Bassett, 1978) پایه این نسل است و مدل CAViaR، VaR را به شکل فرایندی خودرگرسیو و بدون فرض توزیعی برآورد می‌کند (Engle & Manganelli, 2004). کاستی CAViaR آن است که درباره ES اطلاعاتی نمی‌دهد. تیلور (Taylor, 2008) با مدل CARE این شکاف را از مسیر اکسپکتایل‌ها پر کرد، اما استخراج ES از اکسپکتایل به رابطه‌ای میان سطح اکسپکتایل و چندک نیاز دارد که خود به شکل توزیع وابسته است.

نسل سوم، VaR و ES را هم‌زمان و با کمینه‌سازی یک زیان مشترک سازگار برآورد می‌کند. کوئنکر و ماچادو (Koenker & Machado, 1999) نشان داده بودند که رگرسیون چندکی را می‌توان به‌صورت بیشینه‌سازی درست‌نمایی مبتنی بر چگالی لاپلاس نامتقارن تفسیر کرد. تیلور (Taylor, 2019) با متغیر کردن مقیاس این چگالی در طول زمان، آن را به ابزاری برای برآورد هم‌زمان VaR و ES تبدیل کرد و نشان داد که همین تابع برای ارزیابی مشترک نیز سازگار است. پاتون و همکاران (Patton et al., 2019) نیز مدل‌های پویای VaR و ES را با کمینه‌سازی زیان فیسلر–زیگل برآورد کردند. وجه مشترک این نسل آن است که همان منطقی که ارزیابی مشترک را معتبر می‌کند، مبنای برآورد نیز قرار می‌گیرد.

ارزیابی پیش‌بینی‌ها نیز مسیری موازی را طی کرده است. آزمون‌های پوشش کوپیک (Kupiec, 1995) و کریستوفرسن (Christoffersen, 1998) و آزمون چندک پویای انگل و مانگانلی (Engle & Manganelli, 2004) کیفیت VaR را می‌سنجند و برای ES آزمون مک‌نیل و فری (McNeil & Frey, 2000)، آزمون‌های آسربی و سکلی (Acerbi & Szekely, 2014) و آزمون‌های رگرسیونی بایر و دیمیتریادیس (Bayer & Dimitriadis, 2022) پیشنهاد شده‌اند. با این حال، پس‌آزمایی فقط نشان می‌دهد که یک مدل رد می‌شود یا نه و مدل‌های قابل‌قبول را رتبه‌بندی نمی‌کند. برای رتبه‌بندی، توابع امتیازدهی سازگار همراه با آزمون دیبولد و ماریانو (Diebold & Mariano, 1995) و مجموعه اطمینان مدل هانسن و همکاران (Hansen et al., 2011) به کار می‌روند. ریگی و سرتا (Righi & Ceretta, 2015) نیز در مقایسه‌ای گسترده میان مدل‌های برآورد ES نشان دادند که کیفیت

برآورد ES به طول پنجره برآورد وابسته است و پنجره‌های کوتاه به نتایج ضعیف‌تری می‌انجامند، نکته‌ای که در طراحی این پژوهش به آن توجه شده است.

شواهد بازار رمزارزها: مطالعات ریسک رمزارزها نیز همین مسیر را، با کمی تأخیر، پیموده‌اند. کاتسیامپا (Katsiampa, 2019) نشان داد که نوسان رمزارزهای اصلی خوشه‌ای، ماندگار و به شوک‌های گذشته حساس است و گکیلاس و کاتسیامپا (Gkillas & Katsiampa, 2018) با نظریه ارزش فرین نشان دادند که رمزارزها با ریسک دنباله‌ای شدیدی روبه‌رو هستند. استاوروپانیس (Stavroyiannis, 2018) با رویکرد ناپارامتریک نتیجه گرفت که بیت‌کوین در مقایسه با دارایی‌های سنتی به سرمایه احتیاطی بیشتری نیاز دارد و بوری (Borri, 2019) ریسک دنباله‌ای شرطی رمزارزهای اصلی را قابل‌توجه ارزیابی کرد. در گام بعد، جیمنز و همکاران (Jiménez et al., 2022) با رویکرد نیمه‌ناپارامتریک، ماسیل (Maciel, 2021) با مدل‌های نوسان با تغییر رژیم و تروچیوس و تیلور (Trucíos & Taylor, 2023) با مقایسه طیف گسترده‌ای از روش‌ها به پیش‌بینی VaR و ES پرداختند. پیام مشترک این مطالعات آن است که روش‌های انعطاف‌پذیرتر معمولاً بهتر عمل می‌کنند، اما هیچ روشی در همه شرایط برتری مطلق ندارد. گائو و همکاران (Gao et al., 2022) نیز با برآورد مشترک VaR و ES بیت‌کوین از طریق تابع لاپلاس نامتقارن نشان دادند که افزودن تغییر رژیم به مدل CAViaR دقت پیش‌بینی را بهبود می‌دهد. کنار هم گذاشتن این مطالعات سه الگو را نشان می‌دهد. نخست، تمرکز پژوهش‌ها از نوسان به ریسک دنباله و سپس به پیش‌بینی مشترک VaR و ES منتقل شده است. دوم، مدل‌های مشترک نیمه‌پارامتریک در این بازار بیشتر روی یک دارایی یا یک سطح ریسک آزموده شده‌اند. سوم، ارزیابی‌ها اغلب به پس‌آزمایی یا یک تابع امتیازدهی محدود بوده و حساسیت نتایج به طول پنجره و جزئیات پیاده‌سازی کمتر گزارش شده است.

پژوهش‌های داخلی و شکاف پژوهش: ادبیات داخلی سنجش ریسک دنباله‌ای تا همین چند سال پیش تقریباً به‌طور کامل حول بورس اوراق بهادار تهران شکل گرفته بود و مسیری کمابیش شبیه ادبیات جهانی را، با چند سال فاصله، پیموده است. در مطالعات نخست، ES بیشتر محصول جانبی مدل‌های پارامتریک و نظریه ارزش فرین بود. سارنج و نوراحمدی (Saranj & Nourahmadi, 2016) با داده‌های روزانه شاخص کل در دوره ۱۳۸۷ تا ۱۳۹۵ نشان دادند که رویکرد ارزش فرین شرطی، هم در برآورد VaR و هم در برآورد ES، از مدل نرمال ایستا، گارچ نرمال و ارزش فرین غیرشرطی دقیق‌تر است. فلاح‌پور و طبسی (Fallahpour & Tabasi, 2020) همین چارچوب را با داده‌های درون‌روزی و مدل چندفرکتالی نوسان تقویت کردند و آن را از مدل‌های گارچ مبتنی بر روش فراتر از آستانه برتر یافتند. بت‌شکن، پیمانی و صدرالدین کرمی (Botshekan et al., 2019) از زاویه‌ای دیگر به مسئله نگاه کردند و با شبیه‌سازی مونت‌کارلوی مبتنی بر تحلیل مؤلفه‌های اصلی، VaR و ES شاخص‌های صنایع را با دقتی هم‌تراز شبیه‌سازی مونت‌کارلوی متعارف، اما در زمانی کوتاه‌تر، برآورد کردند؛ در همان مطالعه، روش RiskMetrics از هر دو روش عقب ماند. در سال‌های اخیر دامنه مدل‌ها گسترده‌تر شده است. نیلچی و فرید (Nilchi & Farid, 2023) مدل‌های تلاطم تصادفی[1] با توزیع‌های t استیودنت و نرمال چوله را به روش بیزی برآورد کردند و در پس‌آزمایی VaR و ارزش در معرض ریسک شرطی با آزمون‌های کوپیک و چندک پویا، نشانه‌ای از بیش‌برآورد یا کم‌برآورد ریسک نیافتند. کردبچه، زلبل و ابونوری (Kordbacheh et al., 2023) نشان دادند که به‌کارگیری اطلاعات درون‌روزی در قالب مدل گارچ تحقق‌یافته[2] دقت پیش‌بینی VaR شاخص کل را بالا می‌برد. فرزانگان

1. Stochastic Volatility
2. Realized GARCH

(Farzanegan, 2024) نیز با بسط‌های گرام–چارلیر[1] برای جملات اختلال مدل گارچ و ۱۰۰۰ پیش‌بینی خارج از نمونه، نشان داد که پارامتر چولگی به‌تنهایی سهم مهمی در بهبود پیش‌بینی دنباله دارد.

جریان دوم، که به پژوهش حاضر نزدیک‌تر است، به مدل‌سازی مستقیم چندک و میانگین دنباله روی آورده است. نخستین کاربردهای رگرسیون چندکی در بازار سهام ایران بیشتر به سرایت ریسک مربوط بود تا پیش‌بینی آن؛ برای نمونه، خیابانی و محمدیان نیک‌پی (Khiabani & Mohammadian Nikpey, 2018) با مدل خودرگرسیون برداری VaR و توابع واکنش ضربه چندکی نشان دادند که شوک‌های سیستمی بازار به‌طور معناداری به دنباله بازده صنایع منتقل می‌شود و بانک‌ها و فلزات اساسی بیش از دیگر صنایع از آن اثر می‌پذیرند. در حوزه ES، خدام، نصرتیان‌نسب و جعفری صمیمی (Khodam et al., 2021) مدل‌های پویای نیمه‌پارامتریک پاتون و همکاران (Patton et al., 2019) را، که با رویکرد امتیاز خودرگرسیو تعمیم‌یافته (GAS)[2] ساخته می‌شوند، در بورس تهران به کار بردند و نشان دادند که این مدل‌ها ES را بهتر از مدل‌های گارچ و روش‌های پنجره غلتان پیش‌بینی می‌کنند. نزدیک‌ترین مطالعات داخلی به چارچوب این مقاله، کارهای محمدی سالاری و همکاران (Mohammadi Salari et al., 2021, 2025) است. آن‌ها مدل ES-CAViaR با شبه‌درست‌نمایی لاپلاس نامتقارن (Taylor, 2019) را یک بار برای شاخص کل و بار دیگر برای صنعت بانکداری با معیارهای تحقق‌یافته درون‌روزی ترکیب کردند و نشان دادند که این معیارها کارایی پیش‌بینی VaR و ES را افزایش می‌دهند. موسوی سرحدی و همکاران (Mousavi Sarhadi et al., 2023) همین رویکرد را با تجزیه طیفی[3] بازده به مؤلفه‌های کوتاه‌مدت، میان‌مدت و بلندمدت درآمیختند و دریافتند که ES ماهیتی عمدتاً کوتاه‌مدت دارد. در مقابل، رستمی، راستی و عباسی (Rostami et al., 2025) در مقایسه مدل CAViaR چندمتغیره با مدل‌های مبتنی بر کاپولا برای شاخص کل بورس تهران و دو شاخص خارجی، به نتیجه‌ای هشداردهنده رسیدند به طوری که هیچ‌یک از مدل‌ها آزمون چندک پویا را پشت سر نگذاشت، هرچند CAViaR به شوک‌های ناگهانی سریع‌تر واکنش نشان داد. این یافته یادآوری می‌کند که انعطاف یک مدل چندکی به‌خودی‌خود پوشش شرطی درست را تضمین نمی‌کند و عملکرد آن را باید با آزمون‌های سخت‌گیرانه سنجید.

شیوه ارزیابی در این ادبیات نیز تحول یافته، در بیشتر مطالعات، داوری درباره مدل‌ها به آزمون‌های پوشش VaR محدود مانده و ES یا اصلاً پس‌آزمایی نشده یا فقط با آزمون مک‌نیل–فری سنجیده شده است. سارنج و نوراحمدی (Saranj & Nourahmadi, 2016, 2017) از نخستین پژوهشگرانی بودند که مدل‌های پذیرفته‌شده در پس‌آزمایی را در مرحله بعد با روش MCS رتبه‌بندی کردند و محمدی سالاری و همکاران (Mohammadi Salari et al., 2021) نیز در ارزیابی ES همین مسیر را پی گرفتند. با این حال، توابع زیانی که در این مطالعات برای مقایسه یا رتبه‌بندی مدل‌ها به کار رفته‌اند، مانند زیان‌های لوپز، داود و اولسن، از خانواده توابع امتیازدهی سازگار برای زوج VaR و ES به شمار نمی‌روند. با توجه به نتیجه فیسلر و زیگل (Fissler & Ziegel, 2016)، این بدان معناست که کمتر بودن میانگین چنین زیانی لزوماً نشانه درست‌تر بودن پیش‌بینی‌ها نیست. مسئله دیگر، حساسیت نتایج به طراحی ارزیابی است. رستگار و همتی (Rastegar & Hemati, 2022) نشان دادند که نتیجه پس‌آزمایی VaR به حجم نمونه آزمون و سطح اطمینان حساس است و حجم نمونه مناسب به روش برآورد بستگی دارد. با وجود این، در مطالعاتی که مرور شد به‌ندرت اثر طول پنجره برآورد بر نتایج گزارش شده است.

1. Gram–Charlier Expansion
2. Generalized Autoregressive Score (GAS)
3. Spectral Decomposition

ورود پژوهشگران داخلی به بازار رمزارزها تازه‌تر است و تاکنون بیشتر بر نوسان و روابط میان‌بازاری تمرکز داشته است. شکری، سحاب خدامرادی و حاجیلو مقدم (Shokri et al., 2021) با مدل BEKK-GARCH سرریز نوسان از بیت‌کوین به دیگر رمزارزها را، پس از تبدیل قیمت‌ها به ریال، بررسی کردند و نشان دادند که بیشترین اثر به دوج‌کوین و دش می‌رسد. معین‌نمینی و محسنی (Moein Namini & Mohseni, 2023) با مدل همبستگی شرطی پویا (DCC) سرریزهای دوطرفه نوسان میان بیت‌کوین، اتریوم، ریپل و لایت‌کوین را تأیید کردند و دریافتند که همبستگی این دارایی‌ها در دوره‌های بحران به‌شدت بالا می‌رود؛ یافته‌ای که نشان می‌دهد تنوع‌بخشی درون این بازار درست در زمانی که بیشتر به آن نیاز است، کارایی خود را از دست می‌دهد. درباره نقش بیت‌کوین در پرتفوی سرمایه‌گذار ایرانی، نتایج یکسان نیست. مظفری، باجلان و عیوضلو (Mozaffari et al., 2022) دریافتند که بیت‌کوین برای شاخص‌های بورس و فرابورس نقش پناهگاه امن، البته ضعیف‌تر از سکه امامی و طلا، دارد اما پوشش‌دهنده ریسک نیست؛ در حالی که اسکندری و همکاران (Eskandari et al., 2024) با مدل‌های گارچ چندمتغیره نتیجه گرفتند که بیت‌کوین و اتریوم می‌توانند ریسک سرمایه‌گذاری در سهام و سکه را پوشش دهند. تفاوت در تعریف پوشش ریسک و دوره نمونه احتمالاً بخشی از این اختلاف را توضیح می‌دهد. تنها شمار اندکی از مطالعات داخلی به پیش‌بینی ریسک رمزارزها پرداخته‌اند. سماوی و همکاران (Samavi et al., 2022) VaR بیت‌کوین و شاخص کل را با مدل GAS برآورد کردند و در مورد بیت‌کوین، مدل گارچ را مناسب‌تر یافتند. بزرگ‌تباربائی، آقاجان نشتایی و قلی‌زاده (Bozorgtabar Baei et al., 2024)، که نزدیک‌ترین پژوهش داخلی به کار حاضر در بازار رمزارزهاست، VaR چهار رمزارز را در دوره ۲۰۱۸ تا ۲۰۲۲ با مدل‌های CAViaR و رگرسیون چندکی پویا (DQR)[1] پیش‌بینی کردند و نشان دادند که مدل‌هایی که چندک را مستقیماً مدل‌سازی می‌کنند، به‌مراتب بهتر از مدل‌های متداول عمل می‌کنند. این نتیجه با انگیزه اصلی پژوهش حاضر هم‌خوان است، اما آن مطالعه نیز به VaR محدود مانده و ES را برآورد یا ارزیابی نکرده است.

الگوهایی که در بخش ۲–۳ برای ادبیات خارجی برشمردیم، در ادبیات داخلی پررنگ‌تر دیده می‌شوند. ابزارهای برآورد مشترک VaR و ES، به‌ویژه مدل‌های مبتنی بر لاپلاس نامتقارن، در بورس تهران آزموده شده‌اند، اما هنوز به بازار رمزارزها راه نیافته‌اند؛ در این بازار، مطالعات داخلی یا به نوسان و پوشش ریسک پرداخته‌اند یا فقط VaR را پیش‌بینی کرده‌اند. حتی در مطالعات بورس تهران نیز مقایسه مدل‌ها کمتر بر توابع امتیازدهی سازگار برای زوج VaR و ES و آزمون‌های معناداری مانند DM تکیه داشته و حساسیت نتایج به طول پنجره و به مراحل پس از برآورد به‌ندرت گزارش شده است. پژوهش حاضر در محل تلاقی همین کاستی‌ها قرار می‌گیرد به طوری که VaR و ES شش رمزارز اصلی را به‌طور مشترک و با یک مدل نیمه‌پارامتریک پیش‌بینی می‌کند، پیش‌بینی‌ها را هم‌زمان با پس‌آزمایی VaR و ES، سه تابع امتیازدهی سازگار، آزمون DM و روش MCS می‌سنجد و اثر طول پنجره را نیز گزارش می‌کند.

۳. روش‌شناسی پژوهش

داده‌ها و ویژگی‌های آماری بازده‌ها: داده‌های مورد استفاده در این مطالعه شامل بازده روزانه شش رمزارز اصلی بیت‌کوین، اتریوم، ریپل، لایت‌کوین، بایننس‌کوین و کاردانو[2] از پایگاه کوین‌گکو[3] برای دوره ۲ ژانویه ۲۰۱۸ تا ۴ ژانویه ۲۰۲۶ گردآوری شده است. این دارایی‌ها به دلیل نقدشوندگی، سابقه معاملاتی و جایگاه آن‌ها در بازار رمزارزها انتخاب شده‌اند. رمزارزهای با ماهیت استیبل‌کوین مانند تِتِر[4]، به دلیل رفتار نوسانی متفاوت و وابستگی قیمتی به

1. Dynamic Quantile Regression (DQR)
2. BTC, ETH, XRP, LTC, BNB, ADA
3. https://www.coingecko.com/
4. Tether

دارایی مرجع مانند دلار، در نمونه لحاظ نشده‌اند. از آنجا که رمزارزها در همه روزهای هفته معامله می‌شوند، برای هر دارایی ۲۹۲۵ بازده روزانه در اختیار است. بازده لگاریتمی روزانه به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$r_t = ln\frac{P_t}{P_{t-1}}$$ رابطه ۱)

(P_t) قیمت پایانی دارایی در روز (t) است.

جدول ۱. *آمار توصیفی بازده روزانه رمزارزها (۲ ژانویه ۲۰۱۸ تا ۴ ژانویه ۲۰۲۶)*

Table 1. Descriptive statistics of daily cryptocurrency returns (2 January 2018 to 4 January 2026)

دارایی	مشاهدات	میانگین	میانه	انحراف معیار	کمینه	بیشینه	چولگی	کشیدگی	JB	$Q^2(10)$
BTC	2925	0.064	0.058	3.414	-43.371	17.603	-0.865	15.333	18,834***	77.2***
ETH	2925	0.048	0.075	4.518	-56.308	21.941	-0.888	14.377	16,101***	106.6***
XRP	2925	-0.005	-0.042	5.365	-54.955	54.447	0.376	19.590	33,490***	174.9***
LTC	2925	-0.035	0.029	4.854	-47.138	30.107	-0.578	11.545	9,027***	140.7***
BNB	2925	0.157	0.104	5.157	-57.194	75.588	0.894	41.744	182,687***	451.0***
ADA	2925	-0.022	-0.025	5.361	-52.440	54.773	0.208	12.684	11,406***	145.3***

میانگین، میانه، انحراف معیار، کمینه و بیشینه به درصد است. کشیدگی به‌صورت خام (نه مازاد) گزارش شده است. JB آماره آزمون جارک–برا و $Q^2(10)$ آماره لیونگ–باکس برای مربع بازده‌ها با ۱۰ وقفه است؛ *** معناداری در سطح ۱ درصد.

میانگین بازده روزانه همه دارایی‌ها به صفر نزدیک است، اما پراکندگی آن زیاد است به این صورت که انحراف معیار از ۳/۴۱ درصد برای بیت‌کوین تا ۵/۳۷ درصد برای ریپل تغییر می‌کند و بدترین بازده روزانه در همه دارایی‌ها از ۴۳- درصد پایین‌تر است. کشیدگی بین ۱۱/۵ برای لایت‌کوین و ۴۱/۷ برای باینس‌کوین است و آزمون جارک–برا[1] (Jarque & Bera, 1980) نرمال بودن بازده‌ها را در همه موارد به‌شدت رد می‌کند. آماره لیونگ–باکس[2] (Ljung & Box, 1978) برای مربع بازده‌ها نیز در هر شش سری در سطح ۱ درصد معنادار است که نشانه روشنی از خوشه‌بندی نوسان است. چولگی در بیت‌کوین، اتریوم و لایت‌کوین منفی و در ریپل، باینس‌کوین و کاردانو مثبت است یعنی در بخشی از این دارایی‌ها جهش‌های بزرگ مثبت به اندازه ریزش‌ها اهمیت دارند.

این ویژگی‌ها انتخاب مدل را به‌طور مستقیم توجیه می‌کنند. برای نمونه، ضریب همبستگی قدرمطلق بازده امروز با بخش منفی بازده دیروز، یعنی $\min(r_{t-1}, 0)$، در این شش دارایی بین ۰/۱۱- و ۰/۲۳- است؛ علامت منفی به این معناست که هرچه ریزش دیروز بزرگ‌تر باشد، نوسان امروز بیشتر است. همبستگی همین متغیر با بخش مثبت بازده دیروز، یعنی $\max(r_{t-1}, 0)$، بین ۰/۰۳ و ۰/۱۹ است. پس هم ریزش‌ها و هم جهش‌ها نوسان روز بعد را افزایش می‌دهند، ولی شدت این اثر در دو جهت و در دارایی‌های مختلف یکسان نیست. مدلی که به شوک‌های مثبت و منفی ضرایب جداگانه بدهد و VaR و ES را به‌صورت خودرگرسیو به‌روز کند، با این شواهد سازگارتر است تا مدلی که توزیعی ثابت یا واکنشی متقارن فرض می‌کند.

طرح پیش‌بینی خارج از نمونه و انتخاب طول پنجره: ارزیابی به‌صورت خارج از نمونه[3] و با پنجره غلتان[4] ۱۸۲۵ روزه انجام می‌شود. نخستین پنجره از ۲ ژانویه ۲۰۱۸ تا ۳۱ دسامبر ۲۰۲۲ را در بر می‌گیرد و ۱۱۰۰ روز باقیمانده، از ۱ ژانویه ۲۰۲۳ تا ۴ ژانویه ۲۰۲۶، دوره ارزیابی است. در هر روز از این دوره، همه مدل‌ها با ۱۸۲۵ مشاهده پیشین برآورد می‌شوند، پیش‌بینی یک‌روزه VaR و ES ساخته می‌شود و پس از مشاهده بازده واقعی،

1. Jarque–Bera Test
2. Ljung–Box Test
3. Out-of-Sample
4. Rolling Window

پنجره یک روز به جلو می‌رود. در هر پنجره، بازده‌ها ابتدا با میانگین همان پنجره مرکززدایی می‌شـوند، مدل بر روی سری مرکززدایی‌شده (y_t) برآورد می‌شود و پیش‌بینی‌ها با افزودن دوباره همین میانگین به مقیاس بازده باز می‌گردند.

$$y_t = r_t - \overline{r}_w \quad \text{رابطه ۲)}$$

در این رابطه $\overline{r}_w$ میانگین بازده در پنجره جاری است. سطح ریسک ۱ درصد برای سنجش زیان‌های بسیار نادر و سطح ۵ درصد برای بخش گسترده‌تری از دنباله چپ به کار می‌رود.

طول پنجره و دوره ارزیابی بر پایه سـه ملاحظه انتخاب شـد. نخسـت، پنجره پنج‌سـاله دسـت‌کم یک چرخه کامل رونق و رکود را پوشش می‌دهد، از جمله ریزش سال ۲۰۱۸، سقوط مارس ۲۰۲۰، رونق ۲۰۲۱ و فروپاشی‌های سال ۲۰۲۲ همگی در نخسـتین پنجره حضـور دارند. با این طول، در هر پنجره به‌طور متوسـط حدود ۱۸ مشـاهده فراتر از چندک ۱ درصـد وجود دارد که برای برآورد پایدار دنباله لازم اسـت؛ ریگی و سـرتا (Righi & Ceretta, 2015) نیز نشـان داده‌اند که پنجره‌های کوتاه به برآوردهای ضـعیف‌تر ES منجر می‌شـوند. دوم، با این انتخاب همه مشـاهدات باقیمانده صـرف ارزیابی خارج از نمونه می‌شـود. ۱۱۰۰ روز برای هر دارایی حدود ۱۱ نقض مورد انتظار در سـطح ۱ درصد و ۵۵ نقض در سطح ۵ درصد فراهم می‌کند که برای آزمون‌های پوشش و مقایسه‌های آماری کافی است، و دوره ارزیابی نیز دوره‌های بازیابی، رشد و اصلاح قیمت را در بر می‌گیرد. سوم، طول پنجره و دوره ارزیابی برای همه مدل‌ها یکسان است تا مقایسه‌ها هم‌سنگ باشد. انتخاب طول پنجره در واقع یک بده‌بستان است به نحوی که پنجره کوتاه‌تر سریع‌تر با شرایط جدید سازگار می‌شود اما برآورد دنباله را پرنوسان‌تر می‌کند و پنجره بلندتر پایدارتر است اما بحران‌های قدیمی را مدت بیشتری در حافظه نگه می‌دارد. اثر این انتخاب در بخش ۴–۵ با پنجره‌های ۱۱۰۰، ۱۵۰۰ و ۲۲۰۰ روزه بررسی شده است.

مدل CAViaR–CARE: مدل اصلی پژوهش، CAViaR–CARE، برای پیش‌بینی مشترک VaR و ES طراحی شده است. در این ساختار، VaR در سطح (α) به‌عنوان چندک شرطی بازده تعریف می‌شود:

$$P(y_t \leq Q_{\{t,\alpha\}} \mid \Omega_{t-1}) = \alpha \quad \text{رابطه ۳)}$$

در رابطه فوق ($Q_{\{t,\alpha\}}$) پیش‌بینی VaR و (Ω_{t-1}) مجموعه اطلاعات در دسـترس تا زمان $t-1$ اسـت. برای مدل‌سازی پویایی VaR، از مشخصه شیب نامتقارن CAViaR استفاده می‌شود:

$$Q_t(\alpha) = \beta_0 + \beta_1 Q_{t-1}(\alpha) + \beta_2 y_{t-1}^{+} + \beta_3 y_{t-1}^{-} \quad \text{رابطه ۴)}$$

در این معادله، $y_{t-1}^{+} = \max(y_{t-1}, 0)$ و $y_{t-1}^{-} = \min(y_{t-1}, 0)$ اسـت. ضـریب β_1 ماندگاری VaR را نشـان می‌دهد و ضـرایب β_2 و β_3 واکنش VaR به بازده مثبت و منفی روز قبل را جداگانه اندازه می‌گیرند. با این سـاختار اثر شـوک‌های مثبت و منفی گذشـته بر VaR متفاوت لحاظ می‌شـود. چون y_{t-1}^{-} نامثبت اسـت، مقدار مثبت β_3 یعنی VaR پس از یک بازده منفی عمیق‌تر می‌شـود. برای بهبود شـرطی‌بودن عددی مسـئله، عرض از مبدأ برحسب سطح بلندمدت VaR، یعنی c، پارامترگذاری مجدد می‌شود:

$$\beta_0 = (1 - \beta_1)c \quad \text{رابطه ۵)}$$

در رابطه فوق (c) سطح بلندمدت چندک شرطی است.

برای مدل‌سازی ES، از یک سـاختار CARE اسـتفاده می‌شـود که به ES اجازه می‌دهد مانند VaR دارای پویایی زمانی باشد. مسیر خودرگرسیو مرتبط با ES، که با شدت ریسک دنباله‌ای (m_t) مدل‌سازی می‌شود، به‌صورت زیر است:

$$m_t = \gamma_0 + \gamma_1 m_{t-1} + \gamma_2 y_{t-1}^{+} + \gamma_3 y_{t-1}^{-} \quad \text{رابطه ۶)}$$

عرض از مبدأ این معادله نیز برحسب ($\overline{m}$) سطح بلندمدت مسیر CARE، به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$y_0 = (1 - y_1)\overline{m}$$ رابطه ۷)

پیش‌بینی ES از ضرب این مسیر در یک ضریب مقیاس مثبت به دست می‌آید:

$$ES_t = \kappa\, m_t, \qquad \kappa = \exp(\kappa_{log})\,;\ \kappa > 0$$ رابطه ۸)

این مسیر از ساختار خودرگرسیو مدل CARE (Taylor, 2008) الهام گرفته است، اما برخلاف آن مدل از طریق اکسپکتایل برآورد نمی‌شود؛ ES مستقیماً با یک معادله پویای مستقل مدل‌سازی و هم‌زمان با VaR برآورد می‌شود. جدا بودن دو معادله اجازه می‌دهد فاصله ES از VaR در طول زمان تغییر کند. از آنجا که m_t نسبت به $\overline{m}$، γ_2 و γ_3 خطی است، κ به‌طور جداگانه از این پارامترها شناسایی‌پذیر نیست و در عمل نقش یک ضریب مقیاس کران‌دار را دارد؛ پیش‌بینی ES فقط به حاصل‌ضرب κm_t وابسته است. در دنباله چپ، ES باید از VaR محافظه‌کارانه‌تر باشد و بنابراین قید $\mathrm{ES}_t < Q_t < 0$ در همه روزها برقرار نگه داشته می‌شود.

برآورد مشترک و جزئیات پیاده‌سازی: بردار پارامترها، $\theta = (c, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \overline{m}, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \kappa_{\log})$، با بیشینه‌سازی لگاریتم درست‌نمایی لاپلاس نامتقارن به‌طور هم‌زمان برآورد می‌شود (Taylor, 2019). سهم مشاهده t در این تابع برابر است با:

$$l_t(\theta) = \ln(1-\alpha) - \ln(-\mathrm{ES}_t) - \frac{(y_t - Q_t)(\alpha - 1(y_t \le Q_t))}{\alpha(-\mathrm{ES}_t)}$$ رابطه ۹)

در رابطه ۹، (Q_t) خروجی معادله CAViaR و (ES_t) خروجی معادله CARE و $1(\cdot)$ تابع نشانگر است. از آنجا که در دنباله چپ $(\mathrm{ES}_t < 0)$ است، عبارت $(-\mathrm{ES}_t)$ مثبت بوده و لگاریتم آن تعریف‌پذیر است. معیار AL در این پژوهش علاوه بر برآورد پارامترها، برای ارزیابی پیش‌بینی مشترک VaR و ES نیز استفاده می‌شود. پارامترهای مدل از طریق کمینه‌سازی منفی لگاریتم درست‌نمایی لاپلاس نامتقارن برآورد می‌شوند. در تابع هدف، VaR از طریق جزء زیان چندکی و ES از طریق جمله مقیاس $(-\mathrm{ES}_t)$ وارد برآورد می‌شود. بنابراین برخلاف رویکردهای دومرحله‌ای، ES پس از برآورد VaR محاسبه نمی‌شود و هر دو کمیت در یک مسئله بهینه‌سازی تعیین می‌شوند. چگالی لاپلاس نامتقارن در اینجا فقط نقش یک ابزار را دارد و فرضی درباره توزیع واقعی بازده‌ها نیست.

تابع هدف برآورد مدل به شرح زیر قابل تعریف است:

$$\hat{\theta} = \arg\min_{\theta}\left\{-\frac{1}{T-150}\sum_{t=151}^{T} l_t(\theta) + P(\theta)\right\}$$ رابطه ۱۰)

۱۵۰ مشاهده نخست هر پنجره دوره گرم‌شدن[1] است و در تابع هدف وارد نمی‌شود تا اثر مقادیر اولیه بازگشت‌ها از بین برود؛ مقدار اولیه VaR چندک تجربی α همین ۱۵۰ مشاهده و مقدار اولیه مسیر ES برابر $\overline{m}$ است.

در رابطه ۱۰، عبارت $P(\theta)$ مجموعه جریمه‌ها و قیود عددی برای حفظ پایداری و امکان‌پذیری مدل مانند $(ES \le VaR)$ است. این جریمه‌ها شامل جریمه‌ای بسیار بزرگ برای هر روزی که قید $\mathrm{ES}_t < Q_t < 0$ نقض شود، لنگری ضعیف با وزن ۰/۱۵ که c را به چندک تجربی پنجره نزدیک نگه می‌دارد، جریمه‌های یک‌طرفه‌ای که فقط در صورت عبور β_1 از ۰/۹۲، عبور $\beta_1 + 0.5(\beta_2 + \beta_3)$ از ۰/۹۸ یا عبور ضرایب واکنش از ۰/۳۵ فعال می‌شوند، و جریمه‌ای کوچک برای نزدیکی بیش از حد پارامترها به مرزهای مجاز می‌شود. بازه‌های مجاز پارامترها در جدول ۲ آمده است.

مقادیر اولیه: تابع هدف به دلیل ساختار بازگشتی معادلات و وجود تابع نشانگر، ناهموار و غیرمحدب است و ممکن است چند کمینه محلی داشته باشد؛ از این رو انتخاب مقادیر اولیه اهمیت دارد. مقادیر اولیه پارامترهای معادله

1. Burn-in Period

VaR از برآورد مقدماتی مدل CAViaR نامتقارن با رگرسیون چندکی روی همان پنجره (کمینه‌سازی زیان چندکی با دو نقطه آغازین و حداکثر ۲۰۰ تکرار) به دست می‌آید و با اغتشاشی کوچک در حدود ۲ درصد به کار می‌رود؛ این رویه با شیوه انگل و مانگانلی (Engle & Manganelli, 2004) و تیلور (Taylor, 2019) هم‌راستاست. سطح بلندمدت $\overline{m}$ به‌صورت تصادفی از بازه $[-0.12, -0.06]$ در سطح ۱ درصد و $[-0.08, -0.02]$ در سطح ۵ درصد انتخاب می‌شود و سایر پارامترهای معادله ES به‌صورت یکنواخت از بازه‌های جدول ۲ برگزیده می‌شوند. هر بردار آغازین با سه بردار همسایه تکمیل می‌شود که با افزودن اغتشاش نرمال کوچک به c، β_1، β_3، γ_3 و $\kappa_{\log}$ ساخته شده‌اند. همه انتخاب‌های تصادفی با بذر ثابت انجام شده‌اند تا نتایج تکرارپذیر باشد.

بهینه‌سازی و مقابله با کمینه‌های محلی: برآورد اولیه هر دارایی با ۴۰ بهینه‌سازی محلی مستقل در سطح ۱ درصد و ۲۰ بهینه‌سازی در سطح ۵ درصد انجام می‌شود (به‌ترتیب ۱۰ و ۵ بردار آغازین، هر کدام با سه همسایه). از هر نقطه آغازین، بهینه‌سازی در دو مرحله با الگوریتم شبه‌نیوتنی کران‌دار L-BFGS-B[1] انجام می‌شود:

- مرحله نخست با وزن بزرگ‌تر جریمه‌های تنظیم، تا جست‌وجو از نواحی نامطلوب فاصله بگیرد،
- مرحله دوم با وزن‌های استاندارد و با شروع از جواب مرحله نخست.

اگر جواب به همگرایی نرسد یا قیود را نقض کند، بهینه‌سازی با الگوریتم برنامه‌ریزی درجه‌دوم متوالی (SLSQP)[2] و سپس یک مرحله پالایش ادامه می‌یابد. در پایان، جوابی که کمترین مقدار تابع هدف را در میان همه نقاط آغازین دارد انتخاب می‌شود. این تدابیر احتمال گیر افتادن در یک کمینه محلی نامطلوب را کاهش می‌دهد، اما مانند هر مسئله غیرمحدب، یافتن کمینه سراسری را تضمین نمی‌کند.

به‌روزرسانی در دوره خارج از نمونه: در هر روز خارج از نمونه، پارامترها روی پنجره جدید دوباره برآورد می‌شوند. در روزهای عادی، برآورد با شروع گرم[3] از پارامترهای روز قبل و دو همسایه آن و حداکثر ۱۲۰ تکرار انجام می‌شود و هر ۲۵ روز یک برآورد کامل، شامل برآورد مقدماتی رگرسیون چندکی، بردارهای آغازین جدید و پالایش SLSQP، صورت می‌گیرد. اگر شروع گرم ناموفق باشد یا مسیر نامعتبری تولید کند، برآورد کامل به‌طور خودکار جایگزین می‌شود. در برآوردهای کامل، معیار همگرایی بهینه‌ساز در ۸۶ درصد موارد در سطح ۱ درصد و در ۸۳ درصد موارد در سطح ۵ درصد برآورده شد و در سایر موارد جوابی که کمترین مقدار تابع هدف را داشت به کار رفت.

1. Limited-memory BFGS with Bounds (L-BFGS-B)
2. Sequential Least Squares Programming (SLSQP)
3. Warm Start

جدول ۲. بازه‌های مجاز پارامترها و تنظیمات بهینه‌سازی مدل CAViaR–CARE

Table 2. Parameter bounds and optimization settings of the CAViaR–CARE model

پارامتر	نقش	سطح ۱ درصد	سطح ۵ درصد
c	سطح بلندمدت VaR	$[1.2\hat{q}_\alpha,\ 0.8\hat{q}_\alpha]$	$[1.2\hat{q}_\alpha,\ 0.8\hat{q}_\alpha]$
β_1	ماندگاری VaR	[0.70, 0.98]	[0.40, 0.98]
β_2	اثر بازده مثبت بر VaR	[0, 0.35]	[0, 0.60]
β_3	اثر بازده منفی بر VaR	[0.02, 0.90]	[0, 0.60]
$\overline{m}$	سطح بلندمدت مسیر ES	[-0.20, 0]	[-0.10, -0.015]
γ_1	ماندگاری مسیر ES	[0.30, 0.92]	[0.30, 0.90]
γ_2	اثر بازده مثبت بر ES	[0, 0.25]	[0, 0.20]
γ_3	اثر بازده منفی بر ES	[0.02, 0.45]	[0.02, 0.35]
$\kappa_{\log}$	لگاریتم ضریب مقیاس ES	[-0.5, 0.2]	[-0.5, 0.1]
بهینه‌سازی‌های محلی (برآورد اولیه)		$40 = 10 \times 4$	$20 = 5 \times 4$
سقف تکرار L-BFGS-B (مرحله نخست + دوم)		300 + 600	250 + 500
برآورد کامل دوره‌ای		هر ۲۵ روز، ۴ شروع	هر ۲۵ روز، ۲ شروع
شروع گرم روزانه		۳ نقطه، ۱۲۰ تکرار	۳ نقطه، ۱۲۰ تکرار
دوره گرم‌شدن		150	150

$\hat{q}_\alpha$ چندک تجربی α در پنجره برآورد است. تعداد بهینه‌سازی‌های محلی برای برآورد نخستین پنجره هر دارایی گزارش شده است.

مدل‌های رقیب: شش مدل رقیب نماینده رویکردهای اصلی سنجش ریسک هستند. شبیه‌سازی تاریخی، VaR و ES را مستقیماً از چندک و میانگین دنباله تجربی بازده‌های پنجره به دست می‌آورد و نماینده رویکرد ناپارامتریک است. FHS بازده‌ها را با فیلتر گارچ استاندارد می‌کند و چندک تجربی باقیمانده‌ها را با نوسان پیش‌بینی‌شده مقیاس می‌دهد. GARCH-t با توزیع t استیودنت دنباله‌های سنگین را لحاظ می‌کند و GJR-GARCH اثر نامتقارن شوک‌های منفی را در معادله نوسان وارد می‌کند. GARCH-EVT روش دومرحله‌ای مک‌نیل و فری (McNeil & Frey, 2000) است که دنباله باقیمانده‌های استانداردشده را با توزیع پارتوی تعمیم‌یافته برآورد می‌کند. مدل تیلور (Taylor, 2019) نیز به‌عنوان نزدیک‌ترین رقیب نیمه‌پارامتریک، VaR و ES را به‌طور مشترک با تابع درست‌نمایی لاپلاس نامتقارن برآورد می‌کند. همه مدل‌ها با همان پنجره، همان دوره ارزیابی و همان رویه غلتان برآورد شده‌اند.

ارزیابی پیش‌بینی‌ها : ارزیابی خروجی مدل‌ها در سه لایه انجام می‌شود. در لایه نخست، کفایت پیش‌بینی‌های VaR با آزمون پوشش غیرشرطی کوپیک[1] (Kupiec, 1995)، آزمون‌های استقلال و پوشش شرطی کریستوفرسن[2] (Christoffersen, 1998) و آزمون چندک پویا (DQ)[3] (Engle & Manganelli, 2004) بررسی می‌شود.

آزمون نخست فراوانی نقض‌ها را با سطح اسمی مقایسه می‌کند، آزمون‌های کریستوفرسن خوشه‌ای نبودن نقض‌ها را می‌سنجند و آزمون DQ بررسی می‌کند که آیا نقض‌ها با اطلاعات گذشته قابل پیش‌بینی‌اند یا خیر. کفایت ES با آزمون مک‌نیل–فری[4] (McNeil & Frey, 2000) سنجیده می‌شود که صفر بودن میانگین فاصله بازده از ES در روزهای نقض را با روش خودگردان‌سازی[5] می‌آزماید. سطح معناداری همه آزمون‌ها ۵ درصد است.

1. Kupiec
2. Christoffersen
3. Dynamic Quantile (DQ) Test
4. McNeil–Frey Test
5. Bootstrap

در لایه دوم، کیفیت پیش‌بینی مشترک VaR و ES با سه تابع امتیازدهی مقایسه می‌شود. تابع اصلی، امتیاز AL است که برابر قرینه رابطه ۹، یعنی $S_t^{\mathrm{AL}} = -l_t$، است و با منطق برآورد مشترک هم‌خوانی دارد. دو تابع مکمل، امتیاز فیسلر–زیگل (FZ) با مشخصه‌ای که تیلور (Taylor, 2019) به کار برده و امتیاز آسربی–سکلی (AS) هستند:

رابطه ۱۲)
$$S_t^{\mathrm{FZ}} = (I_t - \alpha)q_t - I_t r_t + G_2(e_t)\left(e_t - q_t + \frac{I_t(q_t - r_t)}{\alpha}\right) - \zeta_2(e_t) + \ln 2$$

در این رابطه r_t بازده تحقق‌یافته، q_t و e_t پیش‌بینی VaR و ES، $I_t = 1(r_t \le q_t)$ نشانگر نقض، $G_2(x) = \exp(x)/(1+\exp(x))$ و $\zeta_2(x) = \ln(1+\exp(x))$ است.

رابطه ۱۳)
$$S_t^{\mathrm{AS}} = \alpha\left(\frac{e_t^2}{2} + \frac{W q_t^2}{2} - q_t e_t\right) + I_t\left(\frac{W(r_t^2 - q_t^2)}{2} - e_t(r_t - q_t)\right)$$

که در آن ضریب W برابر ۴ در نظر گرفته شده است. هر سه تابع برای زوج VaR و ES سازگارند؛ یعنی میانگین آن‌ها زمانی کمینه می‌شود که پیش‌بینی‌ها با مقادیر واقعی برابر باشند (Fissler & Ziegel, 2016; Taylor, 2019). مقدار کمتر به معنای عملکرد بهتر است و میانگین امتیاز در دوره خارج از نمونه مبنای مقایسه قرار می‌گیرد. امتیازها روی بازده تحقق‌یافته محاسبه شده‌اند؛ از آنجا که سازگاری تابع AL بر فرض میانگین صفر استوار است، محاسبه‌ها روی بازده مرکززدایی‌شده نیز تکرار شد و ترتیب میانگین امتیاز مدل‌ها در هر سه تابع و هر دو سطح ریسک تغییری نکرد.

در لایه سوم، معناداری تفاوت‌ها آزموده می‌شود. در آزمون دیبولد و ماریانو (Diebold & Mariano, 1995)، تفاضل زیان هر مدل رقیب و CAViaR–CARE، یعنی $d_t = L_t^{\mathrm{rival}} - L_t^{\mathrm{CAViaR-CARE}}$، محاسبه و فرض صفر برابری میانگین زیان به‌صورت دوطرفه آزموده می‌شود؛ واریانس با برآوردگر نیوی و وست (Newey & West, 1987) و ۳۳ وقفه، یعنی جزء صحیح $\sqrt{T}$، برآورد می‌شود. مقدار مثبت آماره به معنای زیان بیشتر مدل رقیب است. روش MCS (Hansen et al., 2011) از میان هر هفت مدل، مجموعه‌ای را تعیین می‌کند که با اطمینان ۹۰ درصد بهترین مدل را در بر دارد. در اجرای این روش از آماره حداکثر ($T_{\max}$) و خودگردان‌سازی ایستای[1] پولیتیس و رومانو (Politis & Romano, 1994) با ۲۰۰۰ تکرار و طول بلوک متوسط ۱۰ استفاده شده است. آزمون DM و روش MCS برای هر دارایی، هر سطح ریسک و هر تابع امتیاز جداگانه اجرا می‌شوند.

٤. تحلیل داده‌ها و یافته‌های پژوهش

1. Stationary Bootstrap

پس‌آزمایی پیش‌بینی‌های VaR و ES

جدول ۳. *خلاصه نتایج پس‌آزمایی خارج از نمونه با پنجره غلتان ۱۸۲۵ روزه*

Table 3. Summary of out-of-sample backtesting results under the 1,825-day rolling window

سطح ریسک	مدل	نرخ نقض (دامنه)	کوپیک	استقلال	پوشش شرطی	چندک پویا	مک‌نیل–فری
۱ درصد	CAViaR–CARE	1.26 (1.00–1.55)	6/6	6/6	6/6	4/6	6/6
	Taylor	1.20 (1.00–1.45)	6/6	6/6	6/6	4/6	6/6
	FHS	0.58 (0.00–1.18)	3/6	6/6	4/6	5/6	5/6
	GARCH-EVT	0.53 (0.09–1.09)	4/6	6/6	4/6	6/6	6/6
	GARCH-t	0.42 (0.00–1.00)	2/6	6/6	3/6	5/6	5/6
	GJR-GARCH	0.45 (0.00–1.18)	2/6	6/6	3/6	5/6	1/6
	HS	0.32 (0.09–0.55)	1/6	6/6	4/6	6/6	6/6
۵ درصد	CAViaR–CARE	5.05 (4.82–5.55)	6/6	6/6	6/6	5/6	6/6
	Taylor	5.47 (4.73–6.45)	5/6	4/6	5/6	0/6	6/6
	FHS	3.36 (2.00–4.45)	1/6	6/6	2/6	4/6	6/6
	GARCH-EVT	3.30 (2.82–3.82)	1/6	6/6	2/6	5/6	6/6
	GARCH-t	2.91 (1.91–3.91)	1/6	6/6	1/6	2/6	6/6
	GJR-GARCH	3.00 (2.18–4.00)	1/6	6/6	2/6	3/6	0/6
	HS	2.48 (2.09–2.91)	0/6	4/6	0/6	0/6	6/6

نرخ نقض، میانگین شش دارایی و در پرانتز دامنه آن (کمینه–بیشینه) به درصد است. عدد زیر هر آزمون تعداد دارایی‌هایی (از شش) است که فرض صفر آزمون در آن‌ها در سطح ۵ درصد رد نشده است.

جدول ۳ نشـان می‌دهد که از نظر فراوانی نقض، فاصـله مدل‌ها از یکدیگر بیش از آن اسـت که در نگاه اول انتظار می‌رود. CAViaR–CARE تنها مدلی اسـت که آزمون کوپیک را در هر دوازده ترکیب دارایی و سـطح ریسـک با موفقیت پشت سر می‌گذارد؛ نرخ نقض آن در سطح ۱ درصد بین ۱/۰۰ و ۱/۵۵ درصد و در سطح ۵ درصد بین ۴/۸۲ و ۵/۵۵ درصد است. آزمون‌های استقلال و پوشش شرطی نیز در هیچ موردی رد نمی‌شوند و آزمون مک‌نیل—فری کفایت ES را در همه دارایی‌ها تأیید می‌کند. تنها ضعف آشکار این مدل در آزمون DQ است که در سطح ۱ درصد برای اتریوم و کاردانو و در سـطح ۵ درصـد برای اتریوم رد می‌شـود؛ یعنی در این دارایی‌ها بخشـی از الگوی نقض‌ها هنوز با اطلاعات گذشته قابل پیش‌بینی است.

مدل تیلور در سطح ۱ درصد پوشش مشابهی دارد (۱/۰۰ تا ۱/۴۵ درصد)، اما در سطح ۵ درصد تصویر تغییر می‌کند به طوری که نرخ نقض در باینس‌کوین به ۶/۴۵ درصد می‌رسد، استقلال نقض‌ها در اتریوم و لایت‌کوین رد می‌شود و آزمون DQ در هر شش دارایی رد می‌شود. به زبان عملی، نقض‌های این مدل پشت سر هم رخ می‌دهند و VaR پس از زیان‌های پیاپی دیر تعدیل می‌شود.

مدل‌های GARCH-t، GJR-GARCH، FHS و GARCH-EVT در جهت مخالف خطا می‌کنند. میانگین نرخ نقض آن‌ها در سطح ۱ درصد بین ۰/۴۲ و ۰/۵۸ درصد است و در بیت‌کوین، مدل‌های FHS، GARCH-t و GJR-GARCH در طول ۱۱۰۰ روز هیچ نقضـی ثبت نکرده‌اند. در سـطح ۵ درصـد نیز نرخ نقض این مدل‌ها بین ۲/۹۱ و ۳/۳۶ درصد است و آزمون کوپیک در پنج دارایی از شش دارایی رد می‌شود. این محافظه‌کاری هزینه دارد به طوری که میانگین VaR پنج درصـــدی این چهار مدل بین ۶/۰۸ و ۶/۳۶ درصـــد اســـت، در حالی که این رقم برای CAViaR–CARE ۵/۲۴ درصد است؛ یعنی حدود ۱۶ تا ۲۱ درصد سرمایه یا وجه تضمین بیشتری مسدود می‌شود، در حالی که نرخ نقض از سـطح هدف دورتر اسـت. GJR-GARCH مشـکل دیگری هم دارد به طوری که میانگین ES آن تقریباً با میانگین VaR برابر است و به همین دلیل آزمون مک‌نیل—فری در سـطح ۱ درصـد در پنج دارایی و

در سطح ۵ درصد در هر شش دارایی رد می‌شود. HS محافظه‌کارترین مدل است (نرخ نقض ۰/۳۲ و ۲/۴۸ درصد) و در سطح ۵ درصد در هیچ دارایی از آزمون‌های کوپیک، پوشش شرطی و DQ عبور نمی‌کند.

نکته‌ای که از این جدول برای ادامه تحلیل اهمیت دارد آن است که قبولی در آزمون ES به‌تنهایی کیفیت مدل را تضمین نمی‌کند. HS آزمون مک‌نیل–فری را در همه دارایی‌ها پشت سر می‌گذارد، اما VaR آن بیش از حد عمیق است و در سطح ۵ درصد نقض‌هایش در دو دارایی خوشه‌ای است. پس‌آزمایی فقط نشان می‌دهد که مدلی رد می‌شود یا نه؛ برای رتبه‌بندی مدل‌های قابل‌قبول باید به توابع امتیازدهی مشترک رجوع کرد.

مقایسه با توابع امتیازدهی

جدول ٤. *میانگین امتیاز AL مدل‌ها در دوره خارج از نمونه*

Table 4. Mean out-of-sample AL scores of the models

مدل	سطح ریسک ۱ درصد							سطح ریسک ۵ درصد						
	ADA	BNB	BTC	ETH	LTC	XRP	میانگین	ADA	BNB	BTC	ETH	LTC	XRP	میانگین
CAViaR–CARE	**-0.884**	**-1.293**	**-1.355**	-1.105	-0.769	-0.919	**-1.054**	-1.323	-1.688	**-1.850**	**-1.543**	-1.317	-1.413	**-1.522**
Taylor	-0.776	-1.235	-1.111	-1.065	-0.813	-0.883	-0.980	-1.246	-1.661	-1.822	-1.470	-1.287	-1.366	-1.475
FHS	-0.819	-1.245	-1.293	-1.093	-0.864	**-0.994**	-1.051	-1.319	-1.720	-1.830	-1.479	-1.301	**-1.444**	-1.516
GARCH-EVT	-0.837	-1.201	-1.206	**-1.125**	**-0.864**	-0.978	-1.035	**-1.325**	-1.726	-1.829	-1.473	**-1.323**	-1.423	-1.517
GARCH-t	-0.838	-1.214	-1.143	-1.036	-0.855	-0.938	-1.004	-1.321	**-1.738**	-1.819	-1.445	-1.296	-1.411	-1.505
GJR-GARCH	-0.818	-1.261	-1.182	-1.063	-0.822	-0.949	-1.016	-1.286	-1.687	-1.823	-1.466	-1.288	-1.402	-1.492
HS	-0.802	-0.988	-1.266	-0.940	-0.788	-0.825	-0.935	-1.251	-1.501	-1.727	-1.422	-1.260	-1.290	-1.409

مقدار کمتر به معنای عملکرد بهتر است و کمترین مقدار هر ستون به‌صورت پررنگ آمده است.

بر اساس امتیاز AL، که معیار اصلی این پژوهش است، CAViaR–CARE در هر دو سطح ریسک کمترین میانگین زیان را دارد، اما فاصله آن با مدل‌های بعدی اندک است. در سطح ۱ درصد میانگین امتیاز این مدل ۱/۰۵۴− است و FHS با ۱/۰۵۱− و GARCH-EVT با ۱/۰۳۵− در رتبه‌های بعدی قرار دارند؛ در سطح ۵ درصد نیز GARCH-EVT و FHS با اختلافی کمتر از ۰/۰۰۷ پس از آن می‌آیند. در سطح دارایی‌ها، CAViaR–CARE در سطح ۱ درصد در بیت‌کوین، باینس‌کوین و کاردانو و در سطح ۵ درصد در بیت‌کوین و اتریوم نخست است. در مقابل، GARCH-EVT در سطح ۱ درصد در اتریوم و لایت‌کوین و در سطح ۵ درصد در لایت‌کوین و کاردانو، FHS در هر دو سطح در ریپل و GARCH-t در سطح ۵ درصد در باینس‌کوین بهترین‌اند. ضعیف‌ترین عملکرد نسبی CAViaR–CARE در لایت‌کوین و در سطح ۱ درصد دیده می‌شود که در آن رتبه آخر را دارد. HS در هر دو سطح بیشترین زیان را دارد و مدل تیلور، با وجود پوشش مناسب در سطح ۱ درصد، در میانگین AL رتبه ششم را کسب می‌کند.

جدول ۵. *میانگین امتیاز AS مدل‌ها در دوره خارج از نمونه ($\times 10^4$)*

Table 5. Mean out-of-sample AS scores of the models ($\times 10^4$)

مدل	سطح ریسک ۱ درصد							سطح ریسک ۵ درصد						
	ADA	BNB	BTC	ETH	LTC	XRP	میانگین	ADA	BNB	BTC	ETH	LTC	XRP	میانگین
CAViaR–CARE	**3.450**	**1.468**	**1.113**	2.226	4.203	**3.220**	**2.613**	8.044	3.468	**2.280**	**4.610**	**7.892**	**6.432**	**5.454**
Taylor	4.489	1.646	1.157	2.350	4.019	3.296	2.826	8.640	3.387	2.341	5.013	8.046	6.670	5.683
FHS	4.199	1.724	1.487	2.253	3.866	3.323	2.809	**7.872**	3.263	2.370	5.034	8.146	6.496	5.530
GARCH-EVT	4.234	1.869	1.761	**2.129**	**3.843**	3.475	2.885	7.884	3.245	2.374	5.104	7.962	6.678	5.541
GARCH-t	4.284	1.810	1.975	2.525	3.945	3.768	3.051	7.996	**3.188**	2.403	5.338	8.201	6.750	5.646
GJR-GARCH	4.274	1.715	1.893	2.459	3.859	3.662	2.977	7.968	3.206	2.352	5.139	8.115	6.593	5.562
HS	4.447	2.571	1.493	2.911	4.196	3.648	3.211	8.782	4.343	2.752	5.379	8.333	7.315	6.150

مقادیر در 10^4 ضرب شده‌اند. مقدار کمتر به معنای عملکرد بهتر است و کمترین مقدار هر ستون به‌صورت پررنگ آمده است.

امتیاز AS همان ترتیب کلی را تأیید می‌کند. در سطح ۱ درصد، CAViaR–CARE با میانگین ۲/۶۱ رتبه نخست را دارد و FHS (۲/۸۱) و مدل تیلور (۲/۸۳) پس از آن قرار می‌گیرند. در چهار دارایی بیت‌کوین، ریپل، باینس‌کوین و

کاردانو، CAViaR–CARE کمترین زیان را دارد، در حالی که در اتریوم و لایت‌کوین GARCH-EVT بهتر است و در لایت‌کوین باز هم CAViaR–CARE در رتبه آخر قرار می‌گیرد. در سطح ۵ درصد، CAViaR–CARE در بیت‌کوین، اتریوم، ریپل و لایت‌کوین نخست است، اما در باینس‌کوین GARCH-t و در کاردانو FHS بهترند و میانگین چهار مدل نخست فقط ۰/۱۱ واحد با یکدیگر فاصله دارد.

جدول ٦. *میانگین امتیاز FZ مدل‌ها در دوره خارج از نمونه ($\times 10^2$)*

Table 6. Mean out-of-sample FZ scores of the models ($\times 10^2$)

مدل	سطح ریسک ۱ درصد							سطح ریسک ۵ درصد						
	ADA	BNB	BTC	ETH	LTC	XRP	میانگین	ADA	BNB	BTC	ETH	LTC	XRP	میانگین
CAViaR–CARE	**7.199**	4.851	**4.361**	5.954	8.054	7.055	**6.246**	**4.986**	3.441	**2.892**	**3.978**	5.023	4.525	**4.141**
Taylor	8.033	**4.820**	4.572	6.021	7.771	6.995	6.369	5.261	3.461	2.926	4.213	5.088	4.671	4.270
FHS	7.804	5.042	4.842	5.928	7.484	**6.716**	6.303	5.011	3.335	2.922	4.199	5.097	**4.460**	4.171
GARCH-EVT	7.715	5.266	5.239	**5.748**	7.477	6.807	6.375	4.990	3.313	2.913	4.220	**5.003**	4.538	4.163
GARCH-t	7.735	5.241	5.539	6.225	7.570	6.975	6.548	5.015	**3.300**	2.936	4.339	5.118	4.575	4.214
GJR-GARCH	7.736	5.165	5.515	6.236	**7.469**	7.097	6.536	5.014	3.303	2.943	4.281	5.093	4.564	4.200
HS	7.893	6.154	4.851	6.731	7.906	7.341	6.812	5.289	3.914	3.159	4.336	5.215	4.942	4.476

مقادیر در 10^2 ضرب شده‌اند. مقدار کمتر به معنای عملکرد بهتر است و کمترین مقدار هر ستون به‌صورت پررنگ آمده است.

نتایج FZ نیز با دو معیار دیگر هم‌جهت است. CAViaR–CARE در هر دو سطح کمترین میانگین زیان را دارد (۶/۲۵ و ۴/۱۴)، FHS و مدل تیلور در سطح ۱ درصد و GARCH-EVT و FHS در سطح ۵ درصد در رتبه‌های بعدی قرار می‌گیرند و HS در هر دو سطح آخر است. پراکندگی رتبه‌ها میان دارایی‌ها در این معیار بیشتر است به نحوی که در سطح ۱ درصد، CAViaR–CARE فقط در بیت‌کوین و کاردانو نخست است و مدل تیلور در باینس‌کوین، FHS در ریپل، GARCH-EVT در اتریوم و GJR-GARCH در لایت‌کوین بهترین‌اند.

هر سه تابع CAViaR–CARE را به‌طور میانگین در رتبه نخست و HS را در رتبه آخر قرار می‌دهند و گروه برتر در همه آن‌ها از CAViaR–CARE، FHS و GARCH-EVT، و در سطح ۱ درصد مدل تیلور، تشکیل می‌شود. با این حال، فاصله میان اعضای این گروه کوچک است و رتبه نخست در دارایی‌های مختلف میان چند مدل دست به دست می‌شود. بنابراین پیش از هر داوری باید دید این تفاوت‌ها از نظر آماری معنادارند یا نه.

معناداری آماری تفاوت‌ها: آزمون DM و روش MCS

جدول ۷. *دارایی‌هایی که در آن‌ها مدل رقیب بر اساس آزمون DM به‌طور معنادار ضعیف‌تر از CAViaR–CARE است*

Table 7. Assets in which a competitor is significantly worse than CAViaR–CARE according to the DM test

سطح ریسک	مدل رقیب	AL	AS	FZ
۱ درصد	Taylor	—	—	—
	FHS	—	BTC (3.34), ADA (2.59)	ADA (2.05)
	GARCH-EVT	—	BTC (5.47), BNB (2.69), ADA (2.28)	BTC (2.89)
	GARCH-t	BTC (2.03)	BTC (7.20), BNB (2.53), ADA (2.37)	BTC (3.82)
	GJR-GARCH	—	BTC (6.47), ADA (2.20)	BTC (3.72)
	HS	BNB (3.71)	BTC (3.01), ETH (2.20), BNB (6.14)	BNB (3.82)
۵ درصد	Taylor	ETH (2.26)	ETH (2.79)	ETH (2.02)
	FHS	—	ETH (2.34)	ETH (2.08)
	GARCH-EVT	—	ETH (2.36)	ETH (2.04)
	GARCH-t	ETH (2.59)	ETH (3.32)	ETH (2.92)
	GJR-GARCH	ETH (2.13)	ETH (2.65)	ETH (2.47)
	HS	BTC (2.75), ETH (2.83), XRP (3.58), BNB (3.60)	BTC (3.58), ETH (3.47), XRP (3.96), BNB (3.06)	BTC (2.24), ETH (2.74), XRP (3.52), BNB (2.98), ADA (2.06)

آماره DM در پرانتز آمده است و معناداری در سطح ۵ درصد سنجیده شده است. علامت «—» یعنی در هیچ دارایی تفاوت معناداری دیده نشده است. در هیچ‌یک از ۲۱۶ مقایسه، مدل رقیب به‌طور معنادار بهتر از CAViaR–CARE نبوده است.

آزمون DM تصویر سنجیده‌تری نسبت به میانگین امتیاز توابع امتیازدهی ارائه می‌دهد (جدول ۷). در سطح ۱ درصد و بر اساس AL، فقط ۲ مقایسه از ۳۶ مقایسه معنادار است. به عبارتی دیگر HS در باینس‌کوین و GARCH-t در بیت‌کوین به‌طور معنادار ضعیف‌تر از CAViaR–CARE هستند اما برتری عددی CAViaR–CARE بر FHS، GARCH-EVT، GJR-GARCH و مدل تیلور در این سطح از نظر آماری قابل تشخیص نیست. معیارهای AS و FZ در سطح ۱ درصد تفاوت‌های معنادار بیشتری نشان می‌دهند (۱۳ و ۵ مورد) که بیشتر آن‌ها به بیت‌کوین، کاردانو و باینس‌کوین مربوط است و هیچ‌کدام مدل تیلور را شامل نمی‌شود. در سطح ۵ درصد، HS در چهار یا پنج دارایی به‌طور معنادار ضعیف‌تر است، در حالی که سایر رقبا، هر جا تفاوت معنادار باشد، فقط در اتریوم از CAViaR–CARE عقب می‌مانند. نکته مهم آن است که در هیچ‌یک از ۲۱۶ مقایسه، مدل رقیب به‌طور معنادار بهتر از CAViaR–CARE نبوده است.

جدول ۸. *عضویت مدل‌ها در مجموعه اطمینان مدل ۹۰ درصد*

Table 8. Model membership in the 90% model confidence set

مدل	سطح ریسک ۱ درصد			سطح ریسک ۵ درصد		
	AL	AS	FZ	AL	AS	FZ
CAViaR–CARE	6/6	6/6	6/6	6/6	6/6	6/6
Taylor	6/6	6/6	6/6	6/6	6/6	6/6
FHS	6/6	5/6 (BTC)	6/6	6/6	6/6	6/6
GARCH-EVT	5/6 (BNB)	4/6 (BTC, BNB)	4/6 (BTC, BNB)	6/6	6/6	6/6
GARCH-t	6/6	4/6 (BTC, BNB)	4/6 (BTC, BNB)	5/6 (ETH)	5/6 (ETH)	5/6 (ETH)
GJR-GARCH	6/6	5/6 (BTC)	5/6 (BTC)	6/6	5/6 (ETH)	6/6
HS	3/6 (ETH, XRP, BNB)	3/6 (BTC, ETH, BNB)	4/6 (ETH, BNB)	2/6 (BTC, ETH, XRP, BNB)	3/6 (BTC, ETH, BNB)	2/6 (BTC, XRP, LTC, BNB)

عدد هر خانه تعداد دارایی‌هایی (از شش) است که مدل در MCS باقی مانده است و دارایی‌های حذف‌شده در پرانتز آمده‌اند.

نتایج MCS (جدول ۸) با آزمون DM سازگار است. CAViaR–CARE و مدل تیلور در هر شش دارایی، هر دو سطح ریسک و هر سه تابع امتیاز در مجموعه برتر باقی می‌مانند و FHS فقط یک بار (امتیاز AS در سطح ۱ درصد در بیت‌کوین) کنار گذاشته می‌شود. در مقابل، HS در ۱۹ مورد از ۳۶ مورد از مجموعه حذف می‌شود و GARCH-t و GARCH-EVT نیز در سطح ۱ درصد، به‌ویژه در بیت‌کوین و باینس‌کوین، چند بار حذف می‌شوند. اندازه

مجموعه‌های نهایی، که بین ۲ تا ۷ مدل است، نشان می‌دهد داده‌های ۱۱۰۰ روزه برای جدا کردن قاطع بهترین مدل کافی نیست. آنچه با اطمینان می‌توان گفت این است که CAViaR–CARE همواره در گروه مدل‌های برتر قرار دارد، نه این‌که به‌تنهایی بهترین مدل است.

جمع‌بندی یکپارچه نتایج ارزیابی

جدول ۹. *کارنامه یکپارچه مدل‌ها بر اساس معیارهای مختلف ارزیابی*

Table 9. Integrated scorecard of the models across evaluation criteria

مدل	سطح ریسک ۱ درصد				سطح ریسک ۵ درصد			
	رتبه AL/AS/FZ	MCS (از ۱۸)	DM (از ۱۸)	پس‌آزمایی (از ۳۰)	رتبه AL/AS/FZ	MCS (از ۱۸)	DM (از ۱۸)	پس‌آزمایی (از ۳۰)
CAViaR–CARE	1/1/1	18	—	28	1/1/1	18	—	29
Taylor	6/3/3	18	0	28	6/6/6	18	3	20
FHS	2/2/2	17	3	23	3/2/3	18	2	19
GARCH-EVT	3/4/4	13	4	26	2/3/2	18	2	20
GARCH-t	5/6/6	14	5	21	4/5/5	15	3	16
GJR-GARCH	4/5/5	16	3	17	5/4/4	17	3	12
HS	7/7/7	10	5	23	7/7/7	7	13	10

رتبه بر اساس میانگین شش دارایی در جداول ۴ تا ۶ است. MCS: تعداد حضور در مجموعه اطمینان مدل از ۱۸ مورد (سه تابع امتیاز و شش دارایی). DM: تعداد مواردی (از ۱۸) که مدل به‌طور معنادار ضعیف‌تر از CAViaR–CARE است. پس‌آزمایی: مجموع قبولی در پنج آزمون جدول ۳ برای شش دارایی (از ۳۰).

جدول ۹ نتایج سه لایه ارزیابی را کنار هم قرار می‌دهد. این معیارها جنبه‌های متفاوتی از کیفیت پیش‌بینی را می‌سنجند و طبیعی است که همیشه هم‌جهت نباشند. پس‌آزمایی به فراوانی و استقلال نقض‌ها توجه دارد و به عمق VaR یا دقت ES در سایر روزها حساس نیست. توابع امتیازدهی هر روز هم دقت VaR و هم فاصله ES را می‌سنجند و مدلی را که بی‌جهت محافظه‌کار باشد جریمه می‌کنند. آزمون DM و روش MCS نیز نشان می‌دهند کدام تفاوت‌های امتیاز از نوسان نمونه‌ای فراتر می‌رود. تنها مدلی که در هر سه لایه عملکرد مطلوبی دارد CAViaR–CARE است به طوری که بهترین رتبه میانگین در هر سه تابع امتیاز، حضور کامل در MCS و بیشترین تعداد قبولی در پس‌آزمایی (۲۸ و ۲۹ از ۳۰) را دارد. مدل تیلور در سطح ۱ درصد رقیب نزدیکی است، اما در سطح ۵ درصد به دلیل خوشه‌ای بودن نقض‌ها عقب می‌افتد. FHS و GARCH-EVT در امتیازدهی قوی‌اند، ولی در سطح ۵ درصد بیش از حد محافظه‌کارند؛ یعنی دنباله را خوب توصیف می‌کنند اما VaR پنج درصدی آن‌ها سرمایه بیشتری از نیاز مسدود می‌کند. HS تقریباً در همه معیارها ضعیف‌ترین مدل است. این کارنامه، در کنار آزمون DM، نشان می‌دهد که برتری CAViaR–CARE پایدار اما کم‌دامنه است.

تحلیل طول پنجره برآورد: برای بررسی اثر طول پنجره، کل ارزیابی با پنجره‌های ۱۱۰۰، ۱۵۰۰ و ۲۲۰۰ روزه نیز تکرار شد (جدول ۱۰). تنظیمات همه مدل‌ها در این اجراها با طرح اصلی یکسان است. چون طول کل نمونه ثابت است، تغییر پنجره دوره ارزیابی را نیز تغییر می‌دهد؛ برای نمونه، پنجره ۱۱۰۰ روزه دوره پرتلاطم ۲۰۲۱ و ۲۰۲۲ را

وارد ارزیابی می‌کند و پنجره ۲۲۰۰ روزه فقط ۷۲۵ روز از سال‌های ۲۰۲۴ و ۲۰۲۵ را. بنابراین این جدول اثر هم‌زمان طول پنجره و دوره ارزیابی را نشان می‌دهد.

جدول ۱۰. *حساسیت نتایج به طول پنجره برآورد*

Table 10. Sensitivity of the results to the estimation window length

پنجره (روز)	دوره ارزیابی (روز)	سطح ریسک ۱ درصد				سطح ریسک ۵ درصد			
		CAViaR–CARE	رقبا	رتبه AL/AS/FZ	DM	CAViaR–CARE	رقبا	رتبه AL/AS/FZ	DM
1100	2021/01–2026/01 (1825)	1.35	0.87–3.79	1/1/1	22/0	5.04	4.28–7.42	1/2/1	32/0
1500	2022/02–2026/01 (1425)	1.35	0.44–1.33	5/1/5	9/0	5.01	3.08–5.31	2/1/2	23/0
1825 (اصلی)	2023/01–2026/01 (1100)	1.26	0.32–1.20	1/1/1	20/0	5.05	2.48–5.47	1/1/1	26/0
2200	2024/01–2026/01 (725)	1.40	0.41–1.79	5/6/6	4/5	5.17	3.06–7.75	1/5/1	14/8

نرخ نقض به درصد و میانگین شش دارایی است. «رقبا» دامنه میانگین نرخ نقض شش مدل رقیب را نشان می‌دهد. رتبه، جایگاه CAViaR–CARE بر اساس میانگین شش دارایی در امتیازهای AL، AS و FZ است. DM: تعداد مقایسه‌هایی (از ۱۰۸) که مدل رقیب در آن‌ها به‌طور معنادار ضعیف‌تر/بهتر از CAViaR–CARE است.

دو الگو در جدول ۱۰ روشن است. نخست، پوشش CAViaR–CARE در همه پنجره‌ها پایدار است (۱/۲۶ تا ۱/۴۰ درصد در سطح ۱ درصد و ۵/۰۱ تا ۵/۱۷ درصد در سطح ۵ درصد)، در حالی که نرخ نقض رقبا با تغییر پنجره جابه‌جا می‌شود؛ برای نمونه، در پنجره ۱۱۰۰ روزه نرخ نقض برخی رقبا در سطح ۱ درصد به ۳/۷۹ درصد و در پنجره ۲۲۰۰ روزه در سطح ۵ درصد به ۷/۷۵ درصد می‌رسد. دوم، رتبه نخست CAViaR–CARE پایدار نیست. در پنجره‌های ۱۱۰۰ و ۱۸۲۵ روزه این مدل تقریباً در همه معیارها نخست است، در پنجره ۱۵۰۰ روزه رتبه آن بین اول و پنجم تغییر می‌کند و در پنجره ۲۲۰۰ روزه، در سطح ۱ درصد به رتبه پنجم و ششم می‌رسد و در چند مورد، به‌ویژه در کاردانو در سطح ۱ درصد و لایت‌کوین در سطح ۵ درصد، رقبا به‌طور معنادار بهتر عمل می‌کنند. با این همه، CAViaR–CARE در ۱۴۳ مورد از ۱۴۴ ترکیب پنجره، سطح ریسک، تابع امتیاز و دارایی در مجموعه اطمینان مدل باقی می‌ماند. به بیان دیگر، پایداری پوشش و حضور در گروه برتر نسبت به طول پنجره مقاوم است، اما برتری عددی به طول پنجره و دوره ارزیابی حساس است.

۵. بحث و نتیجه‌گیری

هدف این پژوهش این بود که نشان دهد رویکرد نیمه‌پارامتریک CAViaR–CARE، که VaR و ES را به‌طور مشترک با تابع درست‌نمایی لاپلاس نامتقارن برآورد می‌کند، در بازار رمزارزها تا چه اندازه پیش‌بینی قابل استفاده‌ای ارائه می‌دهد. پاسخ کوتاه این است که قابل استفاده و رقابتی است، اما به‌طور کلی برتر نیست. این مدل تنها مدلی بود که در همه دارایی‌ها و هر دو سطح ریسک پوششی نزدیک به سطح اسمی داشت، در هر سه تابع امتیاز کمترین میانگین زیان را کسب کرد و هرگز از مجموعه اطمینان مدل حذف نشد. در مقابل، بیشتر تفاوت‌های آن با FHS، GARCH-EVT و مدل تیلور در سطح ۱ درصد معنادار نبود و رتبه نخست آن با تغییر طول پنجره حفظ نشد.

این نتایج با یافته‌های تیلور (Taylor, 2019) و پاتون و همکاران (Patton et al., 2019) درباره رقابتی بودن مدل‌های مشترک نیمه‌پارامتریک، با نتیجه تروچیوس و تیلور (Trucíos & Taylor, 2023) مبنی بر نبود روش برتر مطلق در بازار رمزارزها و با شواهد گائو و همکاران (Gao et al., 2022) درباره کارایی مدل‌های نوع CAViaR برای بیت‌کوین سازگار است. افزون بر این، محافظه‌کاری شدید مدل‌های خانواده گارچ در سطح ۵ درصد و ضعف پایدار HS نشان می‌دهد که در این بازار، انتخاب مدل بدون ارزیابی خارج از نمونه می‌تواند به برآوردی نادرست از ریسک و در نتیجه به تخصیص نادرست سرمایه، منجر شود.

یافته‌های این پژوهش چند توصیه مشخص برای مدیران ریسک، صرافی‌ها و صندوق‌های فعال در بازار رمزارزها دارد:

نخست، برای تعیین حد ضرر، وجه تضمین یا حد معاملاتی روزانه در سطح ۵ درصد، مدلی که پوشش نزدیک به سطح اسمی دارد مناسب‌تر است. در این پژوهش مدل‌های خانواده گارچ و FHS در این سطح نرخ نقضی بین ۲/۹ و ۳/۴ درصد داشتند و VaR آن‌ها به‌طور میانگین ۱۶ تا ۲۱ درصد عمیق‌تر از CAViaR–CARE بود؛ استفاده از آن‌ها بدون کالیبراسیون مجدد به معنای مسدود کردن سرمایه بیش از نیاز است. مدل تیلور نیز به دلیل خوشه‌ای بودن نقض‌ها در سطح ۵ درصد باید با احتیاط به کار رود.

دوم، در سطح ۱ درصد، CAViaR–CARE، FHS، GARCH-EVT و مدل تیلور از نظر آماری هم‌تراز بودند. در چنین شرایطی، انتخاب میان آن‌ها را می‌توان بر پایه ملاحظات عملیاتی مانند سادگی اجرا، شفافیت و هزینه محاسباتی انجام داد، یا پیش‌بینی چند مدل از این گروه را با هم ترکیب کرد.

سوم، شبیه‌سازی تاریخی در همه معیارها ضعیف‌ترین مدل بود و با وجود سادگی، استفاده از آن برای رمزارزها توصیه نمی‌شود.

چهارم، مدیران ریسک، فارغ از مدلی که به کار می‌برند، بهتر است پیش‌بینی‌ها را به‌طور دوره‌ای با تجربه نقض‌های اخیر تنظیم کنند؛ به‌ویژه زمانی که پنجره برآورد دوره‌ای پرتلاطم را در بر دارد و بازار وارد دوره آرام‌تری شده است، یا برعکس.

نتایج این پژوهش را باید با توجه به چند محدودیت تفسیر کرد. نخست، نمونه به شش رمزارز بزرگ و نقدشونده محدود است و به رمزارزهای کوچک، کم‌نقد یا باثبات و به سطح پرتفوی تعمیم‌پذیر نیست. دوم، مدل تغییر رژیم را لحاظ نمی‌کند، در حالی که شواهد ماسیل (Maciel, 2021) و گائو و همکاران (Gao et al., 2022) از اهمیت تغییر رژیم در ریسک رمزارزها حکایت دارد؛ افت رتبه مدل در پنجره ۲۲۰۰ روزه نیز می‌تواند نشانه‌ای از همین موضوع باشد. سوم، هیچ اطلاعات بیرونی، مانند اخبار، متغیرهای کلان اقتصادی، حجم معاملات، نوسان ضمنی یا داده‌های زنجیره‌ای، در مدل وارد نشده است. چهارم، نتایج به معیارهای ارزیابی وابسته است؛ هرچند سه تابع امتیاز سازگار در این پژوهش هم‌جهت بودند، معیارهای دیگر می‌توانند وزن متفاوتی به خطاهای VaR و ES بدهند و پس‌آزمایی ES فقط با آزمون مک‌نیل–فری انجام شد و آزمون‌های رگرسیونی بایر و دیمیتریادیس (Bayer & Dimitriadis, 2022) به کار نرفت.

برای پژوهش‌های آتی، افزودن تغییر رژیم و متغیرهای بیرونی به معادلات VaR و ES، ترکیب پیش‌بینی‌های مدل‌های گروه برتر، به‌کارگیری آزمون‌های رگرسیونی ES همراه با خودگردان‌سازی، گسترش تحلیل به سطح پرتفوی و بررسی نسخه‌ای از مدل که بازده‌ها را پیش از برآورد بر اساس نوسان استاندارد می‌کند، با بازه‌های پارامتری متناسب با مقیاس داده‌ها، مسیرهایی است که می‌تواند یافته‌های این پژوهش را تکمیل کند.

تعارض منافع

برای ارائه مطالب و نگارش این مقاله هیچ‌گونه کمک مالی از هیچ فرد، نهاد و سازمانی دریافت نشده است و نتایج و دستاوردهای این مقاله به نفع یا ضرر سازمان یا فردی خاص نخواهد بود.

Reference

Acerbi, C., & Szekely, B. (2014). Back-testing expected shortfall. *Risk, 27*(11), 76–81.

Acerbi, C., & Tasche, D. (2002). On the coherence of expected shortfall. *Journal of Banking & Finance, 26*(7), 1487–1503. https://doi.org/10.1016/S0378-4266(02)00283-2

Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.-M., & Heath, D. (1999). Coherent measures of risk. *Mathematical Finance, 9*(3), 203–228. https://doi.org/10.1111/1467-9965.00068

Basel Committee on Banking Supervision. (2019). *Minimum capital requirements for market risk*. Bank for International Settlements. https://www.bis.org/bcbs/publ/d457.htm

Basel Committee on Banking Supervision. (2022). *Prudential treatment of cryptoasset exposures*. Bank for International Settlements. https://www.bis.org/bcbs/publ/d545.htm

Bayer, S., & Dimitriadis, T. (2022). Regression-based expected shortfall backtesting. *Journal of Financial Econometrics, 20*(3), 437–471. https://doi.org/10.1093/jjfinec/nbaa013

Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics, 31*(3), 307–327. https://doi.org/10.1016/0304-4076(86)90063-1

Borri, N. (2019). Conditional tail-risk in cryptocurrency markets. *Journal of Empirical Finance, 50*, 1–19. https://doi.org/10.1016/j.jempfin.2018.11.002

Botshekan, M. H., Peymani, M., & Sadredin Karami, M. M. (2019). Estimate and evaluate non-parametric value at risk and expected shortfall based on principal component analysis in Tehran Stock Exchange. *Financial Management Perspective, 8*(24), 79–102. https://jfmp.sbu.ac.ir/article_95615.html (in Persian)

Bozorgtabar Baei, Z., Aghajan Nashtaei, R., & Gholizadeh, M. H. (2024). Analysis of financial risk in the cryptocurrency market: Evidence from predicting value at risk. *Journal of Investment Knowledge, 13*(50), 501–519. https://www.jik-ifea.ir/article_22300.html (in Persian)

Christoffersen, P. F. (1998). Evaluating interval forecasts. *International Economic Review, 39*(4), 841–862. https://doi.org/10.2307/2527341

Diebold, F. X., & Mariano, R. S. (1995). Comparing predictive accuracy. *Journal of Business & Economic Statistics, 13*(3), 253–263. https://doi.org/10.1080/07350015.1995.10524599

Engle, R. F., & Manganelli, S. (2004). CAViaR: Conditional autoregressive value at risk by regression quantiles. *Journal of Business & Economic Statistics, 22*(4), 367–381. https://doi.org/10.1198/073500104000000370

Eskandari, R., Panahian, H., Eskandari, R., & Ghodrati, H. (2024). Investigating the hedging capability of cryptocurrencies in the gold coin and stock markets in Iran. *Financial Research Journal, 26*(4), 815–835. https://doi.org/10.22059/frj.2024.364914.1007505 (in Persian)

Fallahpour, S., & Tabasi, H. (2020). Estimation of expected shortfall based on conditional extreme value theory using multifractal model and intraday data in Tehran Stock Exchange. *Financial Research Journal, 22*(1), 27–43. https://doi.org/10.22059/frj.2018.142184.1006131 (in Persian)

Farzanegan, E. (2024). Analyzing the information contained in the skewness and kurtosis of TEPIX returns for forecasting risk: GARCH model with Gram-Charlier expansions for innovations. *Financial Management Perspective, 14*(45), 149–174. https://doi.org/10.48308/jfmp.2024.104895 (in Persian)

Fissler, T., & Ziegel, J. F. (2016). Higher order elicitability and Osband's principle. *The Annals of Statistics, 44*(4), 1680–1707. https://doi.org/10.1214/16-AOS1439

Gao, L., Ye, W., & Guo, R. (2022). Jointly forecasting the value-at-risk and expected shortfall of Bitcoin with a regime-switching CAViaR model. *Finance Research Letters, 48*, Article 102826. https://doi.org/10.1016/j.frl.2022.102826

Gkillas, K., & Katsiampa, P. (2018). An application of extreme value theory to cryptocurrencies. *Economics Letters, 164*, 109–111. https://doi.org/10.1016/j.econlet.2018.01.020

Glosten, L. R., Jagannathan, R., & Runkle, D. E. (1993). On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks. *The Journal of Finance, 48*(5), 1779–1801. https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1993.tb05128.x

Gneiting, T. (2011). Making and evaluating point forecasts. *Journal of the American Statistical Association, 106*(494), 746–762. https://doi.org/10.1198/jasa.2011.r10138

Hansen, P. R., Lunde, A., & Nason, J. M. (2011). The model confidence set. *Econometrica, 79*(2), 453–497. https://doi.org/10.3982/ECTA5771

Jarque, C. M., & Bera, A. K. (1980). Efficient tests for normality, homoscedasticity and serial independence of regression residuals. *Economics Letters, 6*(3), 255–259. https://doi.org/10.1016/0165-1765(80)90024-5

Jiménez, I., Mora-Valencia, A., & Perote, J. (2022). Semi-nonparametric risk assessment with cryptocurrencies. *Research in International Business and Finance, 59*, Article 101567. https://doi.org/10.1016/j.ribaf.2021.101567

Jorion, P. (2007). Bank trading risk and systemic risk. In M. Carey & R. M. Stulz (Eds.), *The risks of financial institutions* (pp. 29–58). University of Chicago Press. https://doi.org/10.7208/chicago/9780226092980.003.0002

Katsiampa, P. (2019). An empirical investigation of volatility dynamics in the cryptocurrency market. *Research in International Business and Finance, 50*, 322–335. https://doi.org/10.1016/j.ribaf.2019.06.004

Khiabani, N., & Mohammadian Nikpey, E. (2018). Systemic risk analysis in selected industries of Tehran Stock Exchange: A multivariate quantile regression approach. *Iranian Journal of Economic Research, 23*(77), 1–36. https://doi.org/10.22054/ijer.2018.10146 (in Persian)

Khodam, M., Nosratian Nasab, M., & Jafari Samimi, A. (2021). Expected shortfall in Tehran Stock Exchange (dynamic semi-parametric approach). *Journal of Economic Modeling Research, 12*(44), 191–212. https://doi.org/10.52547/jemr.12.44.191 (in Persian)

Koenker, R., & Bassett, G. (1978). Regression quantiles. *Econometrica, 46*(1), 33–50. https://doi.org/10.2307/1913643

Koenker, R., & Machado, J. A. F. (1999). Goodness of fit and related inference processes for quantile regression. *Journal of the American Statistical Association, 94*(448), 1296–1310. https://doi.org/10.1080/01621459.1999.10473882

Kordbacheh, H., Zabol, M. A., & Abounoori, E. (2023). Forecasting daily value-at-risk of the Tehran Stock Exchange index using realized GARCH approach. *Journal of Economic Research and Policies, 31*(105), 63–86. https://qjerp.ir/article-1-2667-fa.html (in Persian)

Kupiec, P. H. (1995). Techniques for verifying the accuracy of risk measurement models. *The Journal of Derivatives, 3*(2), 73–84. https://doi.org/10.3905/jod.1995.407942

Ljung, G. M., & Box, G. E. P. (1978). On a measure of lack of fit in time series models. *Biometrika, 65*(2), 297–303. https://doi.org/10.1093/biomet/65.2.297

Maciel, L. (2021). Cryptocurrencies value-at-risk and expected shortfall: Do regime-switching volatility models improve forecasting? *International Journal of Finance & Economics, 26*(3), 4840–4855. https://doi.org/10.1002/ijfe.2043

McNeil, A. J., & Frey, R. (2000). Estimation of tail-related risk measures for heteroscedastic financial time series: An extreme value approach. *Journal of Empirical Finance, 7*(3–4), 271–300. https://doi.org/10.1016/S0927-5398(00)00012-8

Moein Namini, S., & Mohseni, H. (2023). Investigating the dynamics of volatility relationships in the selected cryptocurrencies. *Financial Management Perspective, 13*(41), 37–58. https://doi.org/10.48308/jfmp.2023.103889 (in Persian)

Mohammadi Salari, E., Gholami Jamkarani, R., Rostami, M. R., & Safa, M. (2025). Tail risk in bank sector using realized measures and dynamic asymmetric models. *Journal of*

Investment Knowledge, 14(54), 39–58. https://www.jik-ifea.ir/article_23531.html (in Persian)

Mohammadi Salari, E., Rostami, M. R., Gholami Jamkarani, R., & Safa, M. (2021). Tail risk analysis using realized measure and dynamic asymmetric Laplace models in Tehran Stock Exchange. *Financial Engineering and Portfolio Management, 12*(48), 391–410. https://sanad.iau.ir/fa/Article/1078917 (in Persian)

Mousavi Sarhadi, S. A., Izadi, H., Safa, M., & Pourfakharan, M. (2023). Dynamic multi-scale expected shortfall in Tehran Stock Exchange: A spectral decomposition of tail risk across time horizons. *Advances in Finance and Investment, 3*(9), 53–72. https://doi.org/10.30495/afi.2023.1967573.1154 (in Persian)

Mozaffari, M. A., Bajalan, S., & Eyvazloo, R. (2022). Analyzing the volatility behavior of Bitcoin and examining its safe haven and hedge capability for Iranian investors. *Financial Management Perspective, 12*(37), 9–35. https://doi.org/10.52547/jfmp.12.37.9 (in Persian)

Newey, W. K., & West, K. D. (1987). A simple, positive semi-definite, heteroskedasticity and autocorrelation consistent covariance matrix. *Econometrica, 55*(3), 703–708. https://doi.org/10.2307/1913610

Nilchi, M., & Farid, D. (2023). Modeling price dynamics and risk forecasting in Tehran Stock Exchange market: Nonlinear and non-Gaussian models of stochastic volatility. *Financial Research Journal, 25*(2), 275–299. https://doi.org/10.22059/frj.2022.350231.1007402 (in Persian)

Nolde, N., & Ziegel, J. F. (2017). Elicitability and backtesting: Perspectives for banking regulation. *The Annals of Applied Statistics, 11*(4), 1833–1874. https://doi.org/10.1214/17-AOAS1041

Patton, A. J., Ziegel, J. F., & Chen, R. (2019). Dynamic semiparametric models for expected shortfall (and value-at-risk). *Journal of Econometrics, 211*(2), 388–413. https://doi.org/10.1016/j.jeconom.2018.10.008

Politis, D. N., & Romano, J. P. (1994). The stationary bootstrap. *Journal of the American Statistical Association, 89*(428), 1303–1313. https://doi.org/10.1080/01621459.1994.10476870

Rastegar, M. A., & Hemati, M. (2022). Sensitivity analysis of two-step multinomial backtests for evaluating value-at-risk. *Financial Research Journal, 23*(4), 523–544. https://doi.org/10.22059/frj.2021.317733.1007136 (in Persian)

Righi, M. B., & Ceretta, P. S. (2015). A comparison of expected shortfall estimation models. *Journal of Economics and Business, 78*, 14–47. https://doi.org/10.1016/j.jeconbus.2014.11.002

Rockafellar, R. T., & Uryasev, S. (2002). Conditional value-at-risk for general loss distributions. *Journal of Banking & Finance, 26*(7), 1443–1471. https://doi.org/10.1016/S0378-4266(02)00271-6

Rostami, M., Rasti, F., & Abbasi, E. (2025). Copula-based risk modeling: A comparative analysis of MCAViaR and Gaussian copulas for global indices. *Journal of Mathematics and Modeling in Finance, 5*(2), 77–106. https://doi.org/10.22054/jmmf.2025.86227.1187

Samavi, M. E., Nikoomaram, H., Madanchi Zaj, M., & Yaghoobnezhad, A. (2022). Dynamic GAS based modeling for predicting and assessing the value at risk of Tehran Stock Exchange index and Bitcoin. *Advances in Finance and Investment, 3*(7), 95–120. https://doi.org/10.30495/afi.2022.1956046.1119 (in Persian)

Saranj, A., & Nourahmadi, M. (2016). Estimating of value at risk and expected shortfall by using conditional extreme value approach in Tehran Securities Exchange. *Financial Research Journal, 18*(3), 437–460. https://doi.org/10.22059/jfr.2016.62450 (in Persian)

Saranj, A., & Nourahmadi, M. (2017). Statistical ranking of different VaR and ES models by using model confidence set approach for the banking industry: With an emphasis on conditional extreme value theory. *Financial Engineering and Portfolio Management, 8*(30), 131–146. https://sanad.iau.ir/fa/Article/1079465 (in Persian)

Shokri, N., Sahab Khodamoradi, M., & Hajiloo Moghadam, A. H. (2021). Investigating the effects of financial volatility spillover between digital currencies (application of multivariate GARCH approach). *Financial Management Perspective, 11*(35), 143–172. https://doi.org/10.52547/jfmp.11.35.143 (in Persian)

Stavroyiannis, S. (2018). Value-at-risk and related measures for the Bitcoin. *The Journal of Risk Finance, 19*(2), 127–136. https://doi.org/10.1108/JRF-07-2017-0115

Taylor, J. W. (2008). Estimating value at risk and expected shortfall using expectiles. *Journal of Financial Econometrics, 6*(2), 231–252. https://doi.org/10.1093/jjfinec/nbn001

Taylor, J. W. (2019). Forecasting value at risk and expected shortfall using a semiparametric approach based on the asymmetric Laplace distribution. *Journal of Business & Economic Statistics, 37*(1), 121–133. https://doi.org/10.1080/07350015.2017.1281815

Trucíos, C., & Taylor, J. W. (2023). A comparison of methods for forecasting value at risk and expected shortfall of cryptocurrencies. *Journal of Forecasting, 42*(4), 989–1007. https://doi.org/10.1002/for.2929