Fin. Manag. Persp. 2026, 16(1), 55-80; doi: 10.48308/jfmp.2026.243687.1580

Financial Management Perspective
Journal homepage: https://jfmp.sbu.ac.ir/

Robust Portfolio Optimization Based on Conditional Value-at-Risk Using GJR-GARCH and Copula

Seyed Ramin Abolfazli*
Gholamhosein Golarzi**
Farid Tondnevis***

Abstract

Introduction :Emerging financial markets are characterized by asymmetric volatility, heavy-tailed return distributions, and nonlinear dependence structures, which pose significant challenges for risk measurement and portfolio optimization. Traditional mean–variance frameworks based on normality assumptions often fail to adequately capture the true nature of financial risk, particularly during periods of market distress and extreme fluctuations. Consequently, portfolio allocation decisions based solely on variance-based measures may underestimate downside risk and lead to suboptimal investment outcomes.

Methodology: This study proposes an empirical framework for portfolio optimization based on Conditional Value-at-Risk (CVaR) and provides a comparative evaluation of standard and robust optimization approaches in the context of the Iranian stock market. The analysis is conducted using daily returns of ten major industry sectors listed on the Tehran Stock Exchange over the period 2015–2025. In the first stage, GJR-GARCH models are employed to capture conditional heteroskedasticity, volatility clustering, and leverage effects and to extract standardized residuals. The empirical results confirm the existence of asymmetric volatility dynamics across most industries, indicating that negative shocks exert a stronger impact on volatility than positive shocks of similar magnitude. Subsequently, Extreme Value Theory (EVT) is applied to model extreme downside risks. The EVT estimates reveal substantial heterogeneity in tail risk across industries, suggesting that exposure to severe losses differs considerably among sectors and highlighting the limitations of conventional risk measures based on normality assumptions. To model nonlinear dependence among industry returns, Archimedean copulas, including Clayton, Frank, and Gumbel specifications, are estimated.

Received: 2026.April .4, Accepted: 2026.July.7.

*PhD Candidate, Financial Engineering, Faculty of Economic & Management University of Semnan, Iran (Corresponding Author).
E-mail: sr.abolfazli@semnan.ac.ir

** Associate Professor, Faculty of Management and Economics, Semnan University, Semnan, Iran.

*** Assistant Professor, Faculty of Management, University of Tehran, Tehran, Iran.

Finding: The results indicate that dependence structures among industries are not purely linear and that tail dependence plays an important role in the transmission of market risk. Based on the estimated copula structures, joint return scenarios are generated and incorporated into two portfolio optimization frameworks: Mean–CVaR and Robust-CVaR. The optimization results show that the robust framework produces a more balanced allocation of portfolio weights and a higher degree of diversification than the classical Mean–CVaR approach. While the conventional model tends to concentrate portfolio weights in a limited number of sectors, the robust framework reduces sensitivity to estimation errors and parameter uncertainty. In-sample evidence further indicates improvements in risk-adjusted performance under the Robust-CVaR specification. To assess the robustness and generalizability of the findings, an out-of-sample evaluation based on six expanding rolling windows covering the period 2020–2025 is conducted. The results demonstrate that the robust portfolio performs similarly to or better than the classical portfolio in most evaluation periods and consistently achieves higher Sharpe ratios under the Clayton copula specification. Moreover, the rolling-window analysis reveals that copula dependence parameters vary over time, providing empirical evidence of parameter instability and uncertainty in the portfolio construction process

Result: . Overall, the findings suggest that integrating GJR-GARCH, Extreme Value Theory, Archimedean copulas, and robust CVaR optimization provides a coherent framework for risk measurement, dependence modeling, and portfolio construction in emerging financial markets. The results also underscore the importance of accounting for asymmetric dependence structures and parameter uncertainty in asset allocation decisions and demonstrate that robust portfolio optimization can improve portfolio stability while mitigating the adverse effects of estimation errors.

Keywords: Robust Optimization; Conditional Value-at-Risk (CVaR); Industry indices; Extreme Value Theory (EVT); Archimedean Copula; GJR-GARCH model

How to Cited: Abolfazli, S. R. , Golarzi,, G. and Tondnevis, F. (2026). Robust Portfolio Optimization Based on Conditional Value-at-Risk Using GJR-GARCH and Asymmetric Dependence. *Financial Management Perspective*, *16*(1),55-80. doi: 10.48308/jfmp.2026.243687.1580.(in persian)

چشم انداز مدیریت مالی ، ۱۴۰۵، دوره ۱۶ شماره ۱، صص ۵۵ –۸۰، doi: 10.48308/jfmp.2026.243618.1577

چشم انداز مدیریت مالی
Journal homepage: https://jfmp.sbu.ac.ir/

نوع مقاله: پژوهشی

بهینه سازی پایدار پرتفوی مبتنی بر ارزش در معرض ریسک شرطی با استفاده از *GJR-GARCH* و توابع کاپولا

سید رامین ابوالفضلی *
غلامحسین گل ارضی **
فرید تند نویس ***

چکیده

مقدمه: بازارهای مالی نوظهور به‌دلیل وجود نوسانات نامتقارن، رفتار دنباله‌های سنگین و وابستگی‌های غیرخطی میان دارایی‌ها، با چالش‌های اساسی در سنجش ریسک و تشکیل پرتفوی بهینه مواجه هستند. چارچوب‌های سنتی مبتنی بر میانگین–واریانس و فروض توزیع نرمال، به‌ویژه در شرایط وقوع شوک‌های شدید بازار، قادر به انعکاس دقیق ریسک‌های واقعی نیستند. هدف پژوهش حاضر ارائه یک چارچوب تجربی برای بهینه‌سازی پرتفوی بر مبنای معیار ارزش در معرض ریسک شرطی *(CVaR)* و مقایسه عملکرد رویکردهای استاندارد و پایدار در بازار سرمایه ایران است. برای این منظور، بازده روزانه ده صنعت منتخب بورس تهران طی دوره زمانی ۱۳۹۴ تا ۱۴۰۴ مورد بررسی قرار گرفت.

روش: در مرحله نخست، مدل *GJR-GARCH* برای استخراج نوسانات شرطی و باقیمانده‌های استانداردشده به کار گرفته شد. نتایج این بخش وجود ناهمسانی واریانس شرطی، خوشه‌بندی نوسان و اثرات نامتقارن شوک‌های مثبت و منفی را در اغلب صنایع تأیید کرد. سپس با استفاده از نظریه مقدار حدی*(EVT)* ، رفتار دنباله‌های افراطی بازده‌ها مدل‌سازی شد. یافته‌های این مرحله نشان داد که شدت ریسک دنباله‌ای در میان صنایع یکسان نبوده و برخی صنایع در معرض زیان‌های حدی شدیدتری قرار دارند. این موضوع ضرورت استفاده از معیارهای ریسک پایین‌دست نظیر *CVaR* را نسبت به معیارهای مبتنی بر واریانس آشکار می‌سازد. به‌منظور بررسی وابستگی‌های غیرخطی میان صنایع، از کاپولاهای ارشمیدسی کلایتون، فرانک و گامبل استفاده شد. نتایج نشان داد که ساختار وابستگی میان صنایع صرفاً خطی نبوده و وجود وابستگی‌های دنباله‌ای در دوره‌های بحرانی و رونق بازار قابل مشاهده است. بر اساس ساختار وابستگی برآوردشده، سناریوهای مشترک بازده تولید و مسئله بهینه‌سازی پرتفوی در دو چارچوب *Mean-CVaR* و *Robust-CVaR* حل شد.

تاریخ دریافت: ۱۴۰۵/۰۱/۱۵ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۵/۰۴/۱۶

* دانشجو دکتری مهندسی مالی، دانشکده مدیریت و اقتصاد، دانشگاه سمنان، سمنان، ایران. (نویسنده مسئول). E-Mail: sr.abolfazli@semnan.ac.ir
** دانشیار، گروه مدیریت و اقتصاد، دانشکده مدیریت و اقتصاد، دانشگاه سمنان، سمنان، ایران.
*** استادیار، گروه بازارها و نهادهای مالی، دانشکده حسابداری و علوم مالی، دانشکدگان مدیریت، دانشگاه تهران، تهران، ایران.

یافته‌ها: نتایج بهینه‌سازی نشان داد که رویکرد پایدار در مقایسه با مدل کلاسیک به توزیع متوازن‌تر اوزان و افزایش تنوع‌بخشی در پرتفوی منجر می‌شود. همچنین نتایج درون‌نمونه‌ای بیانگر بهبود معیارهای عملکرد مبتنی بر ریسک در چارچوب *Robust-CVaR* بود. به‌منظور ارزیابی قابلیت تعمیم نتایج، از آزمون برون‌نمونه‌ای مبتنی بر شش پنجره غلتان طی سال‌های ۱۳۹۹ تا ۱۴۰۴ استفاده شد. یافته‌ها نشان داد که پرتفوی پایدار در اغلب پنجره‌های آزمون عملکردی برابر یا بهتر از مدل کلاسیک داشته و در ساختار وابستگی کلایتون در تمامی پنجره‌های آزمون نسبت شارپ بالاتری کسب کرده است. افزون بر این، نتایج پنجره‌های غلتان نشان داد که پارامترهای وابستگی در طول زمان ثابت نبوده و تغییرات معناداری را تجربه می‌کنند که بیانگر وجود عدم‌قطعیت پارامتری در فرآیند تشکیل پرتفوی است.

نتیجه: به‌طور کلی، نتایج پژوهش نشان می‌دهد که ترکیب مدل*GJR-GARCH* ، نظریه مقدار حدی، کاپولاهای ارشمیدسی و بهینه‌سازی پایدار مبتنی بر *CVaR* می‌تواند چارچوبی منسجم برای اندازه‌گیری ریسک، مدل‌سازی وابستگی و تشکیل پرتفوی در بازارهای مالی نوظهور فراهم آورد .نتایج همچنین اهمیت در نظر گرفتن وابستگی‌های نامتقارن در فرآیند تخصیص دارایی را نشان می‌دهد .یافته‌ها همچنین مؤید آن است که لحاظ عدم‌قطعیت پارامتری می‌تواند به بهبود پایداری عملکرد پرتفوی و کاهش حساسیت آن نسبت به خطاهای برآوردی منجر شود.

کلیدواژه‌ها: بهینه سازی پایدار ؛ ارزش در معرض ریسک شرطی ؛ شاخص صنایع بورسی؛ تئوری ارزش فرین ؛ کاپولای ارشمیدسی؛ مدل GJR-GARCH

استناددهی: ابوالفضلی, سید رامین , گل ارضی, غلامحسین و تندنویس, فرید . (۱۴۰۵). بهینه سازی پایدار پرتفوی مبتنی بر ارزش در معرض ریسک شرطی با استفاده از GJR-GARCH و توابع کاپولا .*چشم انداز مدیریت مالی*،۱۶(۱)،۵۵-۸۰.

۱. مقدمه

بازده دارایی‌های مالی عموماً با فروض کلاسیک توزیع نرمال و ساختارهای وابستگی خطی سازگار نیستند و شواهد تجربی نشان می‌دهد که این داده‌ها اغلب دارای چولگی، کشیدگی بالا، دنباله‌های سنگین و رفتارهای غیرنرمال هستند (Cont ،2001). چنین ویژگی‌هایی بیانگر آن است که احتمال وقوع رخدادهای حدی و زیان‌های شدید به‌مراتب بیش از پیش‌بینی‌های مبتنی بر چارچوب‌های نرمال است و این امر محدودیت‌های جدی برای مدل‌های سنتی مدیریت ریسک ایجاد می‌کند (Embrechts et al., 2001). از این‌رو، در سال‌های اخیر تمرکز پژوهش‌های مالی به سمت مدل‌هایی سوق یافته است که بتوانند ساختارهای پیچیده‌تری از توزیع و وابستگی را در بازده‌ها منعکس کنند. یکی از بارزترین خصوصیات سری‌های زمانی مالی، خوشه بندی نوسان و پایداری شوک‌های بزرگ در طول زمان است؛ پدیده‌ای که منجر به شکل‌گیری خوشه‌های متوالی از دوره‌های پرتلاطم می‌شود (Engle, 1982). افزون بر این، شواهد نشان می‌دهد که شوک‌های منفی معمولاً اثر قوی‌تری بر افزایش نوسان دارند؛ رفتاری که به‌عنوان عدم تقارن نوسان‌پذیری یا اثر اهرمی شناخته می‌شود (Glosten et al., 1993). مدل GJR-GARCH با لحاظ این عدم تقارن، چارچوبی انعطاف‌پذیر برای برآورد پویایی‌های واقعی ریسک فراهم می‌کند و در بسیاری از مطالعات اقتصادسنجی مالی به‌عنوان مدل پایه به کار گرفته شده است (Brooks, 2019).

در کنار پویایی‌های نوسان، تمرکز بر رفتارهای حدی توزیع بازده‌ها اهمیت ویژه‌ای یافته است؛ زیرا بخش عمده‌ای از زیان‌های پرتفوی ناشی از رخدادهای نادر اما شدید است. نظریه مقدار حدی[1] با ارائه ابزارهایی برای مدل‌سازی دنباله‌های توزیع، امکان برآورد دقیق‌تر ریسک‌های حدی را فراهم می‌کند و نقش مهمی در توسعه معیارهای ریسک دنباله‌ای ایفا کرده است (McNeil et al., 2015). علاوه بر این، مطالعات نشان می‌دهد وابستگی میان دارایی‌ها در شرایط بحرانی به‌صورت نامتقارن و دنباله‌محور ظاهر می‌شود؛ به‌طوری‌که هم‌حرکتی‌ها در زیان‌های شدید تقویت می‌شوند (Patton, 2006). استفاده از ساختارهای کاپولا، به‌ویژه خانواده‌های ارشمیدسی، امکان مدل‌سازی این وابستگی‌های غیرخطی و نامتقارن را فراهم می‌سازد (Nelsen, 2006; Joe, 2014). در این میان، معیار ارزش در معرض ریسک شرطی[2] به‌عنوان یک سنجه هم‌ساز برای اندازه‌گیری زیان‌های فراتر از سطح بحرانی معرفی شده و به‌طور گسترده در بهینه‌سازی پرتفوی به‌کار گرفته می‌شود (Rockafellar & Uryasev, 2000). با این حال، عدم‌قطعیت در برآورد پارامترها و تغییرات ساختاری بازار می‌تواند عملکرد مدل‌های کلاسیک را تضعیف کند. رویکرد بهینه‌سازی پایدار[3] با درنظرگرفتن مجموعه‌ای از سناریوهای ممکن، تلاش می‌کند پرتفویی طراحی کند که حساسیت کمتری نسبت به تغییرات پارامترها و نوسانات شدید بازار داشته باشد (Ben-Tal et al., 2009). بر این اساس، هدف پژوهش حاضر ارائه چارچوبی یکپارچه برای بهینه‌سازی پایدار پرتفوی مبتنی بر CVaR است که در آن ویژگی‌های کلیدی داده‌های مالی شامل عدم نرمال بودن توزیع‌ها، خوشه‌بندی نوسان[4]، رفتارهای حدی و وابستگی نامتقارن به‌صورت هم‌زمان لحاظ می‌شود. در این چارچوب، پویایی‌های نوسان با مدل GJR-GARCH برآورد شده، ساختار دنباله‌های توزیع با رهیافت‌های مقدار حدی بررسی شده و وابستگی میان دارایی‌ها با تمرکز بر ساختارهای نامتقارن دنباله‌ای[5] مدل‌سازی می‌گردد. انتظار می‌رود این رویکرد بتواند در مقایسه با مدل‌های کلاسیک، برآورد واقع‌بینانه‌تری از ریسک‌های حدی ارائه داده و به طراحی پرتفوی‌های پایدارتر منجر شود.

1 Exterme Value Theory
2 Conditional Value At Risk(CVaR)
3 Robust Optimization
4 Volatility Clustring
5 Asymmetric Dependence Structures

۲. مبانی نظری و پیشینه پژوهش

مبانی نظری. در این بخش، چارچوب نظری و پیشینه پژوهش‌های مرتبط با موضوع پژوهش حاضر بررسی می‌شود. بدین منظور، ابتدا مبانی نظری سنجه‌های سازگار ریسک معرفی شده و سپس ادبیات مرتبط با مدل‌های نوسان‌پذیری و خوشه‌بندی نوسان، نظریه مقادیر حدی، کاپولاها[۱] و در نهایت رویکردهای بهینه‌سازی پایدار[۲] مبتنی بر معیار ارزش در معرض ریسک شرطی مرور و تحلیل می‌گردد تا زمینه لازم برای ارائه مدل پیشنهادی پژوهش فراهم شود.

نظریه تصمیم‌گیری تحت ریسک و ضرورت سنجه‌های سازگار: پایه‌های نظری مدیریت ریسک در مالی بر مبنای تصمیم‌گیری تحت عدم‌قطعیت است (Von Neumann & Morgenstern, 1944; Pratt, 1964). مدل کلاسیک مارکویتز با فرض نرمال بودن بازده‌ها و کفایت واریانس—کوواریانس، چارچوب اولیه‌ای برای تشکیل پرتفوی ارائه می‌کند؛ اما مطالعات متعدد نشان داده‌اند که توزیع بازده دارایی‌ها از نرمال بودن فاصله داشته و دارای چولگی، کشیدگی و دم‌های پهن هستند (Mandelbrot, 1963; Cont, 2001) ازاین‌رو، استفاده از سنجه‌های ریسک سازگار همچون ارزش در معرض ریسک شرطی در ادبیات مدرن مدیریت ریسک گسترش یافته است (Rockafellar & Uryasev, 2000; Acerbi & Tasche, 2002; Blanchet et al. 2022).

مدل‌های نوسان‌پذیری و خوشه بندی نوسان: مدل‌های خانواده GARCH[3] از دهه ۱۹۸۰ به‌عنوان ابزارهای اصلی برای مدل‌سازی واریانس شرطی و پویایی نوسانات در بازارهای مالی مطرح شده‌اند (Engle, 1982; Bollerslev, 1986) . یکی از ویژگی‌های مهم سری‌های زمانی مالی، پدیده خوشه‌بندی نوسان است؛ به این معنا که دوره‌های نوسان شدید معمولاً با دوره‌های مشابه دنبال می‌شوند و نوسانات تمایل دارند به‌صورت خوشه‌ای در طول زمان ظاهر شوند. این ویژگی نشان می‌دهد که شوک‌های گذشته می‌توانند بر رفتار آتی واریانس اثرگذار باشند و ضرورت استفاده از مدل‌های ناهمسانی واریانس شرطی را تقویت می‌کند. علاوه بر خوشه‌بندی نوسان، شواهد تجربی بیانگر وجود اثرات نامتقارن یا اهرمی در بازارهای مالی است؛ به‌گونه‌ای که اخبار منفی معمولاً تأثیر بیشتری بر افزایش نوسان نسبت به اخبار مثبت دارند. به‌منظور لحاظ این رفتار نامتقارن، مدل GJR-GARCH که توسط گلاستن، جگاناتان و رانکل[۴] (۱۹۹۳) معرفی شد، یک مؤلفه آستانه‌ای به ساختار GARCH اضافه می‌کند و امکان تفکیک اثر شوک‌های مثبت و منفی بر واریانس شرطی را فراهم می‌سازد. از این‌رو، مدل GJR-GARCH به‌عنوان یکی از چارچوب‌های مناسب برای بازنمایی خوشه‌بندی نوسان و اثرات اهرمی در تحلیل‌های مالی مورد استفاده گسترده قرار گرفته است.

نظریه مقادیر حدی و مدل‌سازی رفتار دنباله توزیع : نظریه مقادیر حدی چارچوبی برای تحلیل رفتار افراطی است (Embrechts, , Klüppelberg, & Mikosch. 1997). توزیع تعمیم‌یافته پارتو[۵] امکان برآورد دقیق VaR و CVaR را در سطوح اطمینان بالا فراهم می‌کند (McNeil & Frey, 2000; McNeil, Frey & Embrechts, 2015) .

کاپولاها و مدل‌سازی وابستگی غیرخطی: ابزارهای خطی قادر به بازنمایی وابستگی‌های نامتقارن نیستند (Embrechts, McNeil & Straumann, 2002) . کاپولاها با جداسازی حاشیه‌ها از ساختار وابستگی، امکان مدل‌سازی روابط غیرخطی را فراهم می‌کنند(Sklar, 1959; Nelsen, 2006). کاپولاهای ارشیمدسی[۶] در میان آن‌ها، به دلیل انعطاف‌پذیری بالا در مدل‌سازی وابستگی‌های نامتقارن و توانایی در بازنمایی وابستگی دنباله‌ای، کاربرد گسترده‌ای در ادبیات مالی یافته‌اند. به‌طور خاص، کاپولای کلایتون[۷] قادر به مدل‌سازی وابستگی قوی در دنباله چپ توزیع بوده و ازاین‌رو برای تحلیل ریسک نامطلوب[۸] و زیان‌های هم‌زمان در شرایط بحرانی مناسب است؛ در حالی که کاپولای گامبل[۹] وابستگی دم راست را به‌خوبی بازنمایی کرده و برای بررسی رفتارهای افراطی در دوره‌های رونق کاربرد دارد. کاپولای فرانک[۱۰] نیز به‌عنوان ساختاری متقارن، بدون وابستگی دنباله‌ای قوی، برای مدل‌سازی وابستگی‌های میانی مناسب است. این ویژگی‌ها، همراه با سادگی محاسباتی و وجود فرم بسته برای توابع مولد، سبب شده است که کاپولاهای ارشیمدسی به ابزاری

1 Copula
2 Robust Optimization
[3] Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity
4 Glosten, L.R., Jagannathan, R., & Runkle, D.E. (1993).
[5] Generalized Pareto Distribution (GPD)
[6] Archimedean copulas
[7] Clayton copula
[8] Downside Risk
[9] Gumbel copula
[10] Frank copula

کارآمد در سنجش ریسک سیستمی، تحلیل سرایت مالی و تولید سناریوهای چندمتغیره برای برآورد دقیق VaR و CVaR تبدیل شوند (Nelsen, 2006; Joe, 2014; Patton, 2012).

بهینه‌سازی پایدار تحت CVaR : مطالعات پیشین نشان می‌دهد که مدل‌های سنتی بهینه‌سازی پرتفوی نسبت به خطاهای برآوردی و ناپایداری داده‌ها حساس هستند شود(Michaud, 1989) . این مسئله در مدل‌های مبتنی بر CVaR نیز، به‌ویژه در برآورد ریسک‌های دنباله‌ای، اهمیت قابل‌توجهی دارد. در مقابل، رویکرد Robust CVaR با لحاظ عدم‌قطعیت پارامتری و استفاده از مجموعه‌های عدم‌قطعیت، تلاش می‌کند حساسیت مدل را کاهش داده و تخصیص دارایی‌ها را پایدارتر سازد. این چارچوب با کنترل ریسک‌های دنباله‌ای و جلوگیری از واکنش بیش‌ازحد به نوسانات داده‌ای، می‌تواند عملکردی باثبات‌تر و واقع‌بینانه‌تر در شرایط واقعی بازار ارائه دهد.(Garlappi et al., 2007; Fabozzi et al., 2010; Pflug & Pichler, 2014)

پیشینه پژوهش. پژوهش‌های متعددی در حوزه بهینه سازی پرتفوی، توزیع بازده دارایی و حقایق آشکار شده در مورد بازده دارایی ها از جمله دنباله پهن، چولگی منفی، خوشه‌بندی نوسان و همبستگی نامتقارن دنباله‌ای صورت پذیرفته که در ادامه به آنها پرداخته می شود.

هو و کرچوال(۲۰۰۷)، در پژوهش خود چولگی، همبستگی نامتقارن، خوشه‌بندی نوسان و دنبله پهن را درنظر گرفتند و از توزیع‌های هایپربولیک عمومیت یافته به منظور تخمین ارزش در معرض خطر استفاده کردند و نشان دادند که توزیع -T Skewed کارایی بیشتری در بین توزیع‌های هایپربولیک عمومیت یافته نسبت به سایر توزیع‌ها می‌باشد.

در ادامه ژلنگ (۲۰۱۱)، در پژوهش خود به منظور پیش‌بینی ارزش در معرض ریسک فقط فاکتورهای چولگی و دنبله پهن را درنظر گرفت و خوشه‌بندی نوسان و همبستگی دنباله‌ای را درنظر نگرفت. در این مقاله نشان داده شد که در طی سال ۲۰۰۸ مدل میانگین–ارزش در معرض خطر شرطی کارایی بالاتری نسبت به مدل میانگین واریانس دارد.

در تحقیق دیگری سمپید و همکاران(۲۰۱۷) ، از مدلی بر مبنای GARCH بیضوی، Copula و EVT به منظور تخمین ارزش در معرض خطر استفاده کردند و با استفاده از ۲۸۷۰ مشاهده از سهام بورس لندن نشان دادند که استفاده از این مدل کارایی و ثبات بیشتری نسبت به سایر مدل‌ها دارد.

کرامکار و همکاران(۲۰۱۵)، در تحقیقی با استفاده از رویکرد GARCH-EVT-Coupla ارزش در معرض خطر را بدست آورده و سپس پرتفوی کمترین ریسک را بر اساس ارزش در معرض خطر شرطی محاسبه کردند و همچنین برای مدل‌سازی کاپولا از تابع کلایتون استفاده شده است.

لی و همکاران(۲۰۱۶)، از رویکرد GARCH-EVT-Copula برای تخمین ارزش در معرض خطر پرتفوی شامل شاخص‌های KOSPI, Dow Jones, Shanghai وNikkei استفاده کردند و از توابع کاپولای گوسی و کاپولای t-student و کاپولای کلایتون و فرانک بهره بردند و در انتها نشان دادند که هنگام استفاده از از کاپولای فرانک نتایج بهتری بدست می‌آید.

سهام خدام و همکاران(۲۰۱۸)، مدل GARCH-EVT-Copula را با مدل GARCH-EVT برای بهینه سازی پرتفوی متشکل از ۱۰ شاخص اصلی بورس های جهانی از قبیل بورس نیویورک، توکیو و لندن باهم مقایسه کردند. یافته های پژوهش آنها نشان دهنده این است که مدل ترکیبی GARCH-EVT-Copula عملکرد بهتری داشته است.

بروهن و ارنست (۲۰۲۲)، در پژوهشی با عنوان ارزیابی ویژگی های ریسک بازار ارزهای دیجیتال با رویکرد -GARCH-EVT Copula به این نتایج رسیدند که همه ارزهای دیجیتال مورد بررسی، نوسانات بالایی را در حرکت قیمت خود نشان می دهند، بطوری که بیت کوین بعنوان پایدارترین ارز دیجیتال عمل می کند. همه توزیع های بازدهی دم پهن هستند و در معرض ریسک شدید قرار دارند. همچنین همبستگی های قوی و مثبت درون بازاری، بویژه با دو ارز دیجیتال بیت کوین و اتریوم پیدا شد.

علیزاده و همکاران (۱۴۰۰)، به برآورد ارزش در معرض ریسک و ریزش مورد انتظار پرتفوی چهار شرکت سرمایه گذاری در بورس اوراق بهادار تهران در دوره ۱۳۸۸ تا ۱۳۹۵ با تاکید بر رویکرد ARIMA-GARCH-Copula و مقایسه آن با عملکرد

رویکردهای مقادیر حدی تعمیم یافته (GEV)، روش واریانس- کوواریانس و روش شـبیه سـازی تاریخی پرداختند. نتایج این مطالعه حاکی از آن اسـت که مدل ARIMA-GARCH-Copula بهترین عملکرد و دقت را در محاسـبه ارزش در معرض ریسک و ریزش مورد انتظار داشته و پس از آن مدل GEV که با استفاده تئوری مقدار حدی حاصل شده است در رتبه دوم قرار گرفته است.

حمیدیه و همکاران (۱۴۰۲)، در پژوهشی تجربی به بررسی عملکرد مدل‌های پیشرفته سنجش ریسک، شامل رویکردهای مبتنی بر GARCH، کاپولا و EVT در برآورد ریسـک بازار پرتفوی سـهام پرداختند. در این تحقیق، چندین سـاختار وابسـتگی و مدل نوسـان شـرطی آزمون شـد و دقت آن‌ها در محاسـبه معیارهای ریسـک دنباله نظیر ارزش در معرض ریسـک (VaR) و ریزش موردانتظار (ES) با روش‌های کلاسـیک و مبتنی بر نرمال‌بودن مقایسـه گردید. نتایج نشـان داد که مدل‌های ترکیبی مبتنی بر ناهمسانی واریانس شرطی و وابستگی دنباله‌ای - به‌ویژه مدل‌های کاپولا- EVT- نسبت به روش‌های سنتی، برآورد دقیق‌تری از ریسـک‌های شـدید ارائه می‌دهند. این یافته‌ها تأکید می‌کند که در بازارهای دارای نوسـانات بالا، اسـتفاده از مدل‌های جامع و چندمرحله‌ای می‌تواند از کم‌برآوردی ریسک جلوگیری کرده و ابزار قابل‌اتکاتری برای مدیریت ریسک پرتفوی فراهم آورد.

تندنویس و والامهر (۱۴۰۴)، در پژوهشی با رویکرد مدیریت ریسک پیشرفته، به بررسی کاربرد پیش‌بینی احتمالاتی و بهینه‌سازی پایدار در مدیریت عدم‌قطعیت پرتفوی پرداختند. در این مطالعه، تمرکز اصـلی بر توسـعه رویکردهای پایدار در بهینه‌سـازی سـبد سرمایه‌گذاری و مقایسه آن با روش‌های کلاسیک بود. نتایج نشان داد که استفاده از چارچوب بهینه سازی پایدار[1] موجب بهبود پایداری تصمیمات سرمایه‌گذاری در برابر نوسانات شدید پارامترها می‌شود و کارایی پرتفوی را خصوصاً در شرایط عدم‌اطمینان افزایش می‌دهد. در این پژوهش تأکید شـد که مدل‌های پایدار در کنار تکنیک‌های پیش‌بینی پیشـرفته، می‌توانند از بیش‌براوردی بازده و کم‌براوردی ریسک جلوگیری کنند و عملکرد پرتفوی را به‌طور معناداری بهبود دهند.

بر همین اساس، مسئله اصلی این پژوهش، ارائه مدلی برای بهینه سازی پایدار پرتفوی مبتنی بر ارزش در معرض ریسک شرطی با استفاده از مدل GJR-GARCH و توابع کاپولای ارشمیدسی می باشد.

با مرور پیشینه پژوهش نوآوری های مطالعه حاضر را می توان به صورت زیر بیان کرد:

مطالعه حاضـر با هدف بهبود چارچوب‌های سـنتی بهینه‌سـازی پرتفوی، چند نوآوری روش‌شـناختی را به‌صـورت هم‌زمان ارائه می‌دهد. نخسـت، با تمرکز بر مفهوم بهینه‌سـازی پایدار، عدم‌قطعیت موجود در پارامترهای ورودی مدل از جمله بازده مورد انتظار و ساختار وابستگی دارایی‌ها مورد توجه قرار گرفته است. برخلاف بسیاری از پژوهش‌های پیشین که این پارامترها را قطعی فرض می‌کنند، در این تحقیق چارچوب بهینه سـازی پایدار مبتنی بر ارزش در معرض ریسـک شـرطی به‌کار گرفته شـده تا حسـاسـیت وزن‌های پرتفوی نسبت به خطای برآورد کاهش یافته و پایداری نتایج در شرایط متلاطم بازار افزایش یابد.

نوآوری دوم این پژوهش در ارائه یک چارچوب یکپارچه مبتنی بر تلفیق چند روش پیشـرفته کمی اسـت. در حالی‌که مطالعات گذشـته اغلب مدل‌های نوسـان، نظریه مقادیر حدی و کاپولاها را به‌صـورت مجزا به کار برده‌اند، در این تحقیق مدل GJR-GARCH برای لحاظ اثرات اهرمی و ناهمسانی نوسانات، نظریه مقادیر حدی برای مدل‌سازی ریسک‌های شدید و دنباله‌های سنگین، و کاپولاها برای شناسایی وابستگی‌های غیرخطی و نامتقارن به‌طور هم‌زمان ترکیب شده‌اند. خروجی این مراحل به‌عنوان ورودی مدل بهینه‌سازی مبتنی بر ارزش در معرض ریسک شرطی و Robust CVaR مورد استفاده قرار گرفته و چارچوبی جامع برای استخراج وزن‌های بهینه ارائه شده است.

[1] Robust Optimization

۳. روش‌شناسی پژوهش

جامعه آماری پژوهش شامل کلیه شاخص صنایع بورس اوراق بهادار تهران است. ده شاخص صنایع منتخب بورسی (صنایعی که ارزش بازاری تجمیعی آنها بیش از ۷۰ درصد شاخص کل بورس را تشکیل میدهند و تعداد شرکت های موجود در آن حداقل ۱۰ مورد باشد) انتخاب گردیده است. داده‌های پژوهش شامل قیمت‌های روزانه شاخص این صنایع طی دوره شهریور ۱۳۹۴ تا شهریور ۱۴۰۴ است که از منبع رسمی بورس ویو و سایت شرکت فناوری بورس تهران استخراج شده و پس از پردازش اولیه، بازده شاخص ها محاسبه گردیده است. این پایگاه داده منسجم، مبنای تمام مراحل مدل‌سازی ریسک، استخراج رفتار دنباله‌ای و بهینه‌سازی پرتفوی در ادامه پژوهش قرار گرفته است.

چارچوب نظری پژوهش مبتنی بر بهینه‌سازی پایدار پرتفوی درقالب مدل میانگین–ارزش در معرض ریسک شرطی می‌باشد. در این پژوهش، بازده‌های روزانه دارایی‌ها به‌عنوان سناریوهای تاریخی مورد استفاده قرار گرفته و مقدار VaR و CVaR پرتفوی بر اساس توزیع زیان حاصل از این سناریوها برآورد می‌گردد. بدین‌ترتیب، مدل بهینه‌سازی با استفاده از کل داده‌های دوره مورد مطالعه و در چارچوب تحلیل درون‌نمونه‌ای اجرا شده و در نهایت برای هر رویکرد، یک بردار وزن بهینه برای دارایی‌ها استخراج می‌گردد. بنابراین، اوزان پرتفوی به‌صورت پویا و جداگانه برای هر زمان t بازبرآورد نمی شوند، بلکه کل مشاهدات تاریخی به‌طور هم‌زمان در فرآیند بهینه‌سازی مورد استفاده قرار می گیرند. میزان ارزش در معرض ریسک با استفاده از شبیه‌سازی برآورد می‌شود و در ادامه، ارزش در معرض ریسک شرطی با استفاده از مقدار ارزش در معرض ریسک محاسبه‌شده برای هر پرتفوی به دست می‌آید و در هر مرحله مدل بهینه‌سازی به شرح زیر مورد استفاده قرار می‌گیرد. در مدل ذیل CVAR_p ارزش در معرض ریسک شرطی پرتفوی، R_p بازدهی پرتفوی و R_{targ} بازدهی مورد انتظار یا هدف می‌باشد. در هر یک از رویکردهای مورد بررسی، با حل مدل بهینه‌سازی، اوزان بهینه دارایی‌ها(x_i) استخراج شده و در نهایت پرتفوی‌های حاصل با استفاده از معیار مناسب ارزیابی عملکرد با یکدیگر مقایسه می‌شوند.

$$
\begin{gathered}
\min CVAR_p \\
R_p = R_{targ} \\
\sum_{i=1}^{n} x_i = 1.x_i \geq 0\,.i = 1.2.\ldots.n
\end{gathered}
$$

رابطهٔ ۱)

این مدل به صورت دقیق‌تر به شکل زیر مورد مطالعه قرار خواهد گرفت:

$$
\begin{aligned}
&\min \vartheta + \frac{1}{(1-\alpha)s}\sum_{i=1}^{s} y_i \\
&\text{St:} \\
&y_i \geq \sum_{j=1}^{n}\left[\left(-r_{ij}.x_j\right) - \vartheta\right] \quad i = 1,2,\ldots,s \\
&y_i \geq 0 \quad i = 1,2,\ldots,s \\
&\sum_{i=1}^{n} \widehat{r_j}.x_j \geq r_{min}
\end{aligned}
$$

رابطهٔ ۲)

$$x_j \geq 0 \qquad j = 1,2,\dots,n$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1$$

نمادها:

ϑ: ارزش در معرض ریسک پرتفوی

α : سطح اطمینان مورد استفاده در VaR و CVaR

s: تعداد سناریوهای بازده دارایی (تعداد روزهای مشاهده)

n: تعداد دارایی در نظر گرفته شده در نمونه

r_{ij}: بازده دارایی j در روز مشاده i

$\hat{r}_j$: بازده مورد انتظار سهم j

x_j: وزن دارایی j در پرتفوی

توضیحات مربوط به مدل:

اگر در یک روز (یکی از روزهای مشاهده) زیان پرتفوی بزرگتر از ارزش در معرض ریسک باشد، متغیر y_i تفاوت دقیق بین زیان و ارزش در معرض ریسک را به خود تخصیص می دهد. و اگر زیان پرتفوی از ارزش در معرض ریسک کمتر باشد، متغیر y_i مقدار صفر را به خود تخصیص خواهد داد. از آنجایی که توزیع y_i نشان دهنده توزیع دنباله زیان‌های بیش از VaR است، میانگین را می توان با محاسبه مجموع وزنی تقسیم بر(1-α) یافت. در ادامه با اضافه کردن مقدار ارزش در معرض ریسک به این میانگین، ارزش در معرض ریسک شرطی محاسبه خواهد شد که در تابع هدف مورد بررسی قرار گرفته است.

مدل‌سازی نوسان. در متون مالی، نوسان‌پذیری[1] به‌عنوان یکی از مهم‌ترین شاخص‌های ریسک شناخته می‌شود و به دو مفهوم نوسان غیرشرطی و نوسان شرطی تفکیک می‌گردد. با وجود کارایی بالای مدل GARCH در بازنمایی خوشه‌بندی نوسان، این چارچوب نسبت به شوک‌های مثبت و منفی رفتاری متقارن فرض می‌کند؛ در حالی‌که شواهد تجربی بازارهای مالی وجود اثرات اهرمی را نشان می‌دهد. ازاین‌رو، به‌منظور لحاظ نامتقارنی نوسانات و واکنش متفاوت واریانس شرطی به اخبار منفی، در ادامه از مدل GJR-GARCH به‌عنوان توسعه‌ای از ساختار GARCH استفاده می‌شود.

مدل GJR-GARCH. مدل دیگری که برای پوشش اثرات اهرمی و شوک‌های نامتقارن به‌وجود آمد، مدلGJR است که در سال ۱۹۹۳ میلادی توسط گلوست و همکاران، به وجود آمد .مدل GJR(p,q) را می‌توان به صورت زیر نمایش داد.

$$\sigma_t{}^2 = k + \sum_{i=1}^{p} G_i \sigma_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} A_j \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} L_j S_{t-j} \varepsilon_{t-j}^2 \qquad \text{رابطهٔ ۳)}$$

مشروط بر آنکه:

[1] Volatility

$$\sum_{i=1}^{p} G_i + \sum_{j=1}^{q} A_j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{q} L_j < 1$$ رابطه ۴)

$$K > 0, G_i \geq 0, A_j \geq 0, A_j + L_J \geq 0$$ رابطه ۵)

همچنین در معادله S_{t-j} تابع علامت است و اگر $\varepsilon_{t-j} < 0$ باشد، آنگاه مقدار یک و در غیر اینصورت مقدار صفر به خود می‌گیرد.

نظریه کاپولا[1]. رویکرد کاپولا برای اولین بار توسط اسکلار[2] معرفی شد. این رویکرد با اتصال توزیع‌های حاشیه‌ای به توزیع مشترک، همبستگی میان متغیرهای تصادفی را توضیح می‌دهد. بر اساس تئوری اسکلار برای توزیع مشترک دو بعدی $F(x_1.x_2)$ برای دو متغیر تصادفی X_1 و X_2 با توزیع‌های حاشیه‌ای $F(x_1)$ و $F(x_2)$ یک تابع کاپولا C وجود دارد که:

$$F(x_1.x_2) = C[F_1(x_1).F_2(x_2)]$$ رابطه ۶)

با مشتق گرفتن از دو طرف معادله فوق داریم:

$$\frac{\partial^2 F(x_1.x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 C[F_1(x_1).F_2(x_2)]}{\partial F_1 \partial F_2} f_1(x_1).f_2(x_2) = \frac{\partial^2 C[u_1.u_2]}{\partial u_1 \partial u_2} \times \prod_i \frac{\partial F_i(x_i)}{\partial x_i} = c(\tilde{u}) \times \prod_i f_i(x_i)$$ رابطه۷)

در رابطه فوق، f_i نشـــان‌دهنده‌ی تابع چگالی $F_i(x_i)$ و $u_i =$ برای هر $i = 1$ و2 و $\tilde{u} = (u_1.u_2)$ و $c(\tilde{u})$ تابع چگالی کاپولاست. در حالت کلی که متغیرها دارای توزیع پیوسته باشند، قضیه اسکلار بیان می‌کند که هر تابع توزیع مشترک چندمتغیره را می‌توان به صـورت ترکیبی از توابع توزیع حاشـیه‌ای و یک تابع وابسـتگی موسـوم به کاپولا نمایش داد. به‌عبارت‌دیگر، سـاختار وابستگی میان متغیرهای تصادفی را می‌توان به‌صورت جداگانه و مستقل از توزیع‌های حاشیه‌ای مدل‌سازی کرد.

اگر تمام توزیع‌های حاشـیه‌ای پیوسـته باشـند، تابع کاپولا منحصـر به‌فرد خواهد بود و می‌توان آن را به‌طور یکتا از روی مقادیر توزیع‌های حاشیه‌ای به‌دست آورد. ویژگی کلیدی این نظریه آن است که هیچ ضرورتی برای هم‌توزیع بودن متغیرهای حاشیه‌ای وجود ندارد؛ به‌عبارت‌دیگر، متغیرها می‌توانند دارای توزیع‌های مختلف باشـــند، بدون آنکه مانعی برای تعریف تابع کاپولا به‌وجود آید. این ویژگی مهم، امکان بسیار ارزشمندی را برای محققان فراهم می‌سازد تا با استفاده از انواع مختلف توابع کاپولا، وابستگی میان متغیرهای تصـادفی با توزیع‌های ناهمســان را به‌دقت تحلیل کرده و ســاختار همبســتگی میان آن‌ها را با دقت بیشــتری مدل‌ســازی نمایند. توابع کاپولا به‌ویژه در حوزه مالی، ابزار قدرتمندی برای تحلیل وابســتگی‌های غیرخطی و دنباله‌ای میان دارایی‌ها محسوب می‌شوند.

کاپولاهای ارشـمیدسـی. کاپولای ارشـمیدسـی خانواده‌ای پرکاربرد از توابع کاپولا با سـاختاری سـاده و قابلیت‌های تحلیلی متنوع است. تابع کاپولای ارشمیدسی دو متغیره به صورت $C(u_1.u_2) = \varphi^{[-1]}\{\varphi(u_1) + \varphi(u_2)\}$ است که پیوسته، اکیداً کاهشی و دارای تابع مولد $\varphi: [0.1] \rightarrow [0.\infty)$ به طوری که $\varphi(1) = 0$ و تابع شبه معکوس $\varphi^{[-1]}$ به صورت معادله زیر است.

$$\varphi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \varphi^{-1}(t) & 0 \leq t \leq \varphi(0) \\ 0 & \varphi(0) \leq t \leq \infty \end{cases}$$ رابطه۸)

سه نوع کاپولای ارشمیدسی به صورت رایج بکار گرفته می شوند که عبارتند از، کاپولای کلایتون، کاپولای فرانک و کاپولای گامبل که در ادامه مورد اشاره قرار خواهند گرفت.

[1] COPULA
[2] Sklar

کاپولای فرانک[1]. کاپولای فرانک به صورت زیر ارائه می‌شود.

$$C^{Frank}(u_1.u_2;\alpha) = -\frac{1}{\alpha}\ln\,(1+\frac{(e^{-\alpha u_1}-1)(e^{-\alpha u_2}-1)}{e^{-\alpha}-1}) \qquad \text{رابطه۹)}$$

تابع مولد این کاپولا عبارت است از:

$$\Psi_\alpha(t) = -\ln\,(1+\frac{(e^{-\alpha t}-1)}{(e^{-\alpha}-1)}) \qquad \text{رابطه۱۰)}$$

تابع چگالی کاپولای فرانک به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$c^{Frank} = \frac{\alpha(1-e^{-\alpha})e^{-\alpha(u_1+u_2)}}{((1-e^{-\alpha})-(1-e^{-\alpha u_1})(1-e^{-\alpha u_2}))^2} \qquad \text{رابطه۱۱)}$$

پارامتر α در کاپولای فرانک شدت وابستگی متقارن میان متغیرها را اندازه‌گیری می‌کند. مقادیر بزرگ‌تر α بیانگر هم‌حرکتی قوی‌تر بازده‌ها و مقادیر نزدیک به صفر نشان‌دهنده استقلال متغیرها است. از آنجا که این کاپولا فاقد وابستگی دنباله‌ای است، پارامتر مذکور وابستگی را در کل توزیع بازده‌ها منعکس می‌کند.

کاپولای گامبل[2]. کاپولای گامبل به صورت زیر ارائه می‌شود.

$$C^{Gumble}(u_1.u_2;\theta) = \exp\,\{-\left[(-lnu_1)^\theta+(-lnu_2)^\theta\right]^{\frac{1}{\theta}}\} \qquad \text{رابطه۱۲)}$$

تابع مولد این کاپولا به شرح زیر است:

$$\Psi_\theta(t) = (-\ln \mathrm{t})^\theta \qquad \text{رابطه۱۳)}$$

تابع چگالی کاپولای گامبل به شرح زیر است:

$$c^{Gumble}(u_1.u_2;\theta) = \exp\,(-A^{\frac{1}{\theta}})\frac{a^{\theta-1}b^{\theta-1}}{u_1u_2}A^{\frac{1}{\theta}-2}\left[A^{\frac{1}{\theta}}+(\theta-1)\right], 0 < u_1, u_2; \theta \geq 1;\;\; a=-lnu_1, b=-lnu_2, A=a^\theta+b^\theta \qquad \text{رابطه۱۴)}$$

پارامتر θ در کاپولای گامبل شدت وابستگی دنباله راست را کنترل می‌کند. با افزایش مقدار این پارامتر، احتمال وقوع همزمان بازده‌های بزرگ در متغیرهای مورد مطالعه افزایش می‌یابد و وابستگی میان آن‌ها در ناحیه بالایی توزیع تقویت می‌شود. بنابراین،

[1] Frank Copula
[2] Gumbel Copula

این پارامتر میزان هم‌حرکتی دارایی‌ها در شرایط رونق بازار و شوک‌های مثبت را منعکس می‌کند و برای تحلیل رفتار مشترک متغیرها در نواحی افراطی سمت راست توزیع از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است.

کاپولای کلایتون[1]. کاپولای کلایتون نیز به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$C^{Clayton}(u_1.u_2;\alpha) = ({u_1}^{-\alpha} + {u_2}^{-\alpha} - 1)^{(-\frac{1}{\alpha})}$$ رابطه۱۵)

این کاپولا دارای تابع مولد به صورت زیر است.

$$\Psi_\alpha(t) = \frac{1}{\alpha}(t^{-\alpha} - 1)^{\frac{1}{\alpha}}$$ رابطه۱۶)

در نتیجه تابع چگالی این کاپولا به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$c^{Clayton}(u_1.u_2;\alpha) = (1 + \alpha)(u_1 u_2)^{-\alpha-1}({u_1}^{-\alpha} + {u_2}^{-\alpha} - 1)^{-(2+\frac{1}{\alpha})}$$ رابطه۱۷)

پارامتر α در کاپولای کلایتون شدت وابستگی دنباله چپ را کنترل می‌کند. افزایش مقدار این پارامتر نشان‌دهنده تقویت احتمال وقوع زیان‌های همزمان در دارایی‌ها و افزایش هم‌حرکتی آن‌ها در شرایط نامطلوب بازار است. بنابراین، این پارامتر اطلاعات مهمی درباره ریسک سیستماتیک و سرایت شوک‌های منفی فراهم می‌کند و از این رو در تحلیل ریسک‌های حدی و بهینه‌سازی پرتفوی مبتنی بر CVaR اهمیت ویژه‌ای دارد.

بهینه‌سازی پایدار. در این پژوهش، عدم‌قطعیت موجود در پارامترهای بازده و ریسک، ناشی از خطای برآورد و ناپایداری ساختار بازار، در قالب چارچوب بهینه‌سازی پایدار مدل‌سازی می‌شود. برخلاف رویکردهای کلاسیک که پارامترهای ورودی را قطعی فرض می‌کنند، در این مطالعه بازده‌های مورد انتظار درون یک مجموعه عدم‌قطعیت بازه‌ای تعریف می‌گردند. این مجموعه عدم‌قطعیت به‌صورت بازه‌ای متقارن حول برآوردهای تاریخی مشخص شده و میزان محافظه‌کاری سرمایه‌گذار از طریق پارامتر Γ کنترل می‌شود. در نتیجه، مسئله بهینه‌سازی به‌گونه‌ای بازفرموله می‌شود که حداقل‌سازی CVaR پرتفوی نسبت به بدترین تحقق ممکن پارامترها در مجموعه عدم‌قطعیت انجام گیرد. این بازفرمول‌بندی موجب افزایش پایداری پرتفوی نسبت به خطاهای برآورد، کاهش حساسیت به نوسانات ساختاری و جلوگیری از تمرکز بیش‌ازحد وزن‌ها بر دارایی‌های ظاهراً کم‌ریسک می‌شود.

به‌منظور توضیح موارد فوق در ساختار کمی و ریاضیاتی بحث را با یک مدل برنامه‌ریزی خطی پیش می‌بریم. مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی با بردار متغیر تصمیم $x(n \times 1)$ پارامترهای $A(m \times n)$، $c(n \times 1)$ و $b(m \times 1)$ دارای فرم عمومی‌زیر است.

$$\begin{aligned} & min_x c'.x \\ & \text{St} \\ & Ax \geq b \\ & x \in X \end{aligned}$$ رابطه۱۸)

[1] Claton Copula

بدون اینکه حالت کلی نقض شـود، فرض می‌کنیم که فقط داده‌های موجود در ماتریس ضـرایب$A(m \times n)$ دارای عدم‌قطعیت هســـتند. و داده‌های $c(n \times 1)$ و $b(m \times 1)$ را قطعی در نظر می‌گیریم. زیرا مســـئله را می‌توانیم در حالت زیر نوشـــته و دو بردار$c(n \times 1)$ و $b(m \times 1)$ را نیز جزئی از ماتریس ضرایب در نظر بگیریم.

$$\begin{aligned}&min_x Z\\&\text{St}\\&Z - c'.x \geq 0\\&Ax - by \geq 0\\&x \in X.y = 1\end{aligned}$$ رابطه۱۹)

در رابطه ۱۹ اگر پارامترهای ماتریس A دارای عدم‌قطعیت باشد و تصمیم‌گیرنده بدون درنظر گرفتن این موضوع به تحلیل مسئله بپردازد، ممکن است به جوابی دست پیدا کند که با نوسان پارامترهای موجود در ماتریس A از شرایط شدنی بودن و یا بهینگی خارج شـود. بنابراین آنچه که برای تحلیل‌گر اهمیت دارد شـــدنی بودن این جواب به ازای تمامی مقادیر ممکن برای پارامترهای دارای عدم‌قطعیت است. بنابراین فرم پایدار مسئله ۱۹ به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}&min_x c'.x\\&\text{St}\\&a'_i x \geq b \qquad \forall i.\forall a_i \in \Upsilon\\&x \in X\end{aligned}$$ رابطه۲۰)

در این رابطه عبارتΥ تحت عنوان مجموعه‌ی عدم‌قطعیت شـــناخته می‌شـــود و دربرگیرنده‌ی تمامی‌مقادیر ممکنی اســـت که بردارهای a_i می‌توانند اتخاذ نمایند. واضح است که بردارهای a_i نشان‌دهنده‌ی سطرهای ماتریس A هستند. اگر بخواهیم بردار x برای تمامی‌مقادیر ممکن موجود در Υدر مجموعه‌ی محدودیت‌های $a'_i x \geq b$ صـــدق نماید، کافی اســـت کاری کنیم که به ازای کمترین مقدار$a'_i x$ (بر روی بردارهایa_i)؛ نامساوی برقرار باشد. به‌عبارتی:

$$\begin{aligned}&min_x c'.x\\&\text{St}\\&min_{a_i \in \Upsilon} a'_i x \geq b \qquad \forall i\\&x \in X\end{aligned}$$ رابطه۲۱)

تحلیل مدل پایدار ۲۱ متضمن پیدا کردن $min_{a_i \in \Upsilon} a'_i x$ به ازای همه‌ی X های شـدنی است. این کار تحلیل مسئله را بسیار دشوار و پیچیده خواهد نمود. به این مسئله‌ی کمینه‌سازی که در فرم پایدار مسئله ظاهر می‌گردد مسئله بهینه‌سازی داخلی گفته می‌شـود. آنچه که در بهینه‌سـازی پایدار اهمیت دارد این اسـت که فرم پایدار مسـئله را می‌توان به‌صـورت یک مسـئله مسـتقل بازنویسی نموده و مسئله مستقل را تحلیل نمود.

کاربرد بهینه سازی پایدار در بهینه سازی پرتفو. در یک مسئله انتخاب سبد سرمایه‌گذاری سهام، فرض بر این است که n سهم در بازار سرمایه وجود دارد. نرخ بازده‌ی هر سهم، یک متغیر تصادفی است. در این شرایط مسئله انتخاب سهم به‌صورت زیر مطرح می‌شود:

$$\max_x \sum_{j=1}^{n} r_j . x_j$$
$$\text{St}$$
$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1$$
$$x_j \geq 0$$

رابطه۲۲)

اگر پارامترهای مدل مذکور (r_j) قطعی فرض شـــوند، دارایی که بازده‌ی مورد انتظار بالاتری دارد، برای تشـــکیل ســـبد سرمایه‌گذاری انتخاب شده و تمامی ثروت سرمایه گذار در این دارایی سرمایه‌گذاری می‌شود. اما روشن است که بازده‌ی دارایی‌ها دارای قطعیت کامل نیست. در ابتدا فرض می‌شـود که مجموعه‌ی عدم‌قطعیت برای بازده‌ی دارایی‌ها به‌صـورت یک مجموعه‌ی بیضی‌گون درنظرگرفته شده‌است.

$$\Upsilon = \{[r_j] : [r_j] = [r_j^0] + M.u; u \in B_p(r)\}$$
$$B_p(r) = \{u \big| \|u\|_p \leq l\}$$
$$\|u\|_p = \left(\sum_{j=1}^{n} (u_j)^p\right)^{1/p}$$

رابطه۲۳)

با این توضیح، مدل مطرح شده در رابطه ۲۳ به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\max_x \quad t$$
$$\text{St}$$
$$\sum_{j=1}^{n} r_j^0 . x_j - l \, \|M.x\|_p \geq t$$
$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1$$
$$x_j \geq 0$$

رابطه ۲۴)

اگر ماتریس M برابر با ماتریس واریانس – کواریانس دارایی‌های مذکور باشـــد، و درجه‌ی بدنی نرمی[1] برابر با ۲ فرض شـــود، مدل فوق به همان مدل میانگین واریانس مارکویتز تبدیل می‌شود:

$$\max_x \quad t$$
$$\text{St}$$
$$\sum_{j=1}^{n} r_j^0 . x_j - l \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} . x_i . x_j} \geq t$$

رابطه۲۵)

[1] Norm

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1$$
$$x_j \geq 0$$

در قدم بعدی فرض می‌شود که مجموعه‌ی عدم‌قطعیت، به‌صورت بازه‌ای تعریف شده‌است. به‌عبارتی:

$$r_j = [\overline{r_j} - s_j . \overline{r_j} + s_j]$$ رابطه ۲۶)

با استفاده از مدل ارائه شده، مدل بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$max_x \sum_{j=1}^{n} \overline{r_j} . x_j - \Gamma . p - \sum_{j=1}^{n} q_j$$
$$\text{St}$$
$$p + q_j \geq s_j . x$$ رابطه ۲۷)
$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1$$
$$x_j \geq 0$$

در این مدل، پارامتر Γ می تواند مقادیری بین صفر و n به خود اختصاص دهد. هرچه مقدار این پارامتر کمتر باشد، اهمیت کمتری به نوسان پارامترها داده می‌شود و به‌عبارتی سرمایه‌گذاری ریسک‌پذیرتر است و مقادیر بالاتر Γ نشان از ریسک گریز بودن سرمایه‌گذار دارد.

برای تکمیل این فرایند لازم است که مقدار مناسبی را برای پارامتر Γ که مقدار محافظه‌کاری برای هر محدودیت مشخص می‌کند، انتخاب نمود. برای هر محدودیت به شکل $\overline{a_i} . x > b_i$ مقدار $1 - \varepsilon_i$ به‌عنوان سطح اطمینان تصمیم‌گیرنده نسبت‌به محدودیت i ام، معرفی می‌شود. در چنین حالتی مقدار مناسب برای Γ را می‌توان از رابطه ۲۸ محاسبه نمود که Φ نشان‌دهنده‌ی تابع توزیع تجمعی نرمال استاندارد است.

$$\Gamma_i = 1 + \Phi^{-1}(1 - \varepsilon_i)\sqrt{n}$$ رابطه ۲۸)

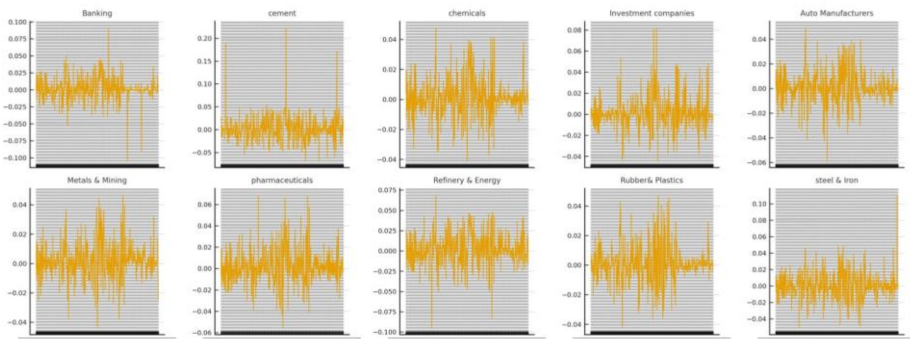
همچنین برای مقایسه و تجزیه و تحلیل پرتفوی‌های بدست آمده از آزمون شارپ استفاده می‌شود.

$$Sharpe = \frac{r_p - r_f}{\sigma_{r_p}}$$ رابطه ۲۹)

٤. تحلیل داده‌ها و یافته‌های پژوهش

توصیف داده‌ها. داده های مورد استفاده در این پژوهش بصورت روزانه (پنج روز در هفته) و از سایت بورس اوراق بهادار تهران برای بازه زمانی ۱۳۹۴/۰۶/۱۸ تا ۱۴۰۴/۰۶/۲۱ استخراج شده است که مجموعا شامل ۲۳۹۶ روز کاری مشاهده می باشد. متغیرهای مورد استفاده در این پژوهش بازده شاخص ده صنعت بزرگ بورسی –که بیش از ۷۰ درصد از شاخص کل بورس را

تشکیل می دهند- را شامل می شود. صنایع منتخب عبارتند از شاخص صنعت بانکی، صنعت خودرو، صنعت شرکت های سرمایه گذاری، ، صنعت آهن و فولاد، صنعت کانه های فلزی و معادن، صنعت دارو، صنعت سیمان، صنعت لاستیک و پلاستیک، صنعت شیمیایی و صنعت فرآوردهای نفتی بازدهی شاخص صنایع از رابطه $R_t = ln(\frac{p_t}{p_{t-1}}) \times ۱۰۰$ محاسبه شد. شکل۱ روند بازدهی متغیرهای مورد مطالعه را به تفکیک نشان می دهد.



شکل ۱: *روند بازدهی متغیرها*

Figure 1. Daily Returns of Industry Indices

برای توصیف داده‌ها از متغیرهای میانگین، واریانس، چولگی وکشیدگی استفاده شده است. همچنین برای اینکه نشان دهیم توزیع داده‌ها نرمال و متقارن نیست از آزمون جارک برا[1] استفاده شده است. آماره این آزمون بر اساس رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$JB = \frac{n}{6}(s^2 + \frac{(k-3)^2}{4}) \qquad \text{(۳۰ رابطهٔ)}$$

در این رابطه n تعداد نمونه، s چولگی و k کشیدگی داده‌ها را نشان می‌دهد. توجه داشته باشید که این آماره از توزیع مربع کای با دو درجه آزادی پیروی می‌کند. جدول ۱ آماره های توصیفی متغیر های فوق را بصورت خلاصه نشان می دهد. این جدول تعداد مشاهدات، بیشینه، کمینه، میانگین، انحراف معیار، چولگی، آماره جارک-برا و احتمال مربوط به آن را نشان می دهد.

جدول ۱. *توصیف داده‌ها*

Table 1. Descriptive Statistics

	بانک	سیمان	شیمیایی	سرمایه گذاری	خودرو	کانه های فلزی و معادن	دارو	فراورده های نفتی	لاستیک و پلاستیک	آهن و فولاد
میانگین	۰/۰۰۱۲۷	۰/۰۰۱۷۵	۰/۰۰۱۷۱	۰/۰۰۱۵۴	۰/۰۰۱۲۵	۰/۰۰۱۵۵	۰/۰۰۱۵۱	۰/۰۰۱۷۶	۰/۰۰۱۵۶	۰/۰۰۱۶۴
میانه	-۰/۰۰۰۲۹	۰/۰۰۰۱۴	۰/۰۰۰۹۱	۰/۰۰۰۴۱	۰/۰۰۰۵۰	-۰/۰۰۰۲۰	۰.۰۰۰۱۷	۰/۰۰۰۶۵	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۱۲
ماکزیمم	۰/۰۱۲۹۲	۰/۰۷۶۵۲	۰/۰۸۰۱۰	۰/۰۸۳۳۵	۰/۲۳۴۰۸	۰/۰۹۹۶۳	۰.۰۶۴۳۵	۰/۱۹۷۰۷	۰/۱۱۰۶۱	۰/۰۷۴۱۴
مینیمم	-۰/۰۱۰۴۶	-۰/۰۵۸۷۷	-۰/۰۵۶۸۱	-۰/۰۷۸۴۸	-۰/۱۸۴۰۴	-۰/۰۵۶۱۷	-۰.۰۹۱۴۴	-۰/۰۹۵۱۲	-۰/۰۸۶۳۲	-۰/۰۵۵۷۴
انحراف معیار	۰/۰۱۶۰۱	۰/۰۱۳۱۵	۰/۰۱۳۳۴	۰/۰۱۳۵۴	۰/۰۲۵۳۱	۰/۰۱۶۳۲	۰/۰۱۲۴۰	۰/۰۲۰۰۶	۰/۰۱۷۶۵	۰/۰۱۶۴۹
چولگی	۰/۳۰۵۰۰	۰/۲۸۱۱۶	۰/۲۲۳۶۱	۰/۳۲۵۲۱	۰/۷۳۹۲۰	۰/۶۴۸۲۲	۰/۲۹۹۵۶	۰/۳۹۹۵۵	۰/۲۴۷۶۶	۰/۴۷۵۵۴
کشیدگی	4/1538 9	1/6472 7	2/1933 5	۲/۹۴۱۰۴	۹/۳۷۱۶۰	۳/۱۱۷۳۰	۳/۴۵۷۶۵	۴/۲۲۹۶۲	۱/۸۹۹۷۶	۱/۶۲۴۲۵
جارک-برا	۱۷۴۹/۷۲۲	۳۸۲	۱۲۲۲	۱۸۳۹	۳۵۲	۴۹۷	۳۰۰	۱۱۳۲	۹۰۰	۸۹۴۱
احتمال	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰./۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰

[1] Jarque and Bera

بررسی آمار توصیفی بازده روزانه ده صنعت اصلی بورس تهران نشان می‌دهد که رفتار آماری بازده‌ها از الگوی نرمال فاصله معناداری دارد. میانگین بازده روزانه در تمامی صنایع مثبت است، اما مقدار آن نسبتاً کوچک بوده و در کنار نوسانات قابل‌توجه، بیانگر ماهیت پرریسک بازار است. مقادیر مینیمم و ماکزیمم بازده‌ها نشان می‌دهد که صنایع مختلف در معرض شوک‌های شدید مثبت و منفی قرار دارند و دامنه نوسان آن‌ها گسترده است. نتایج مربوط به چولگی نشان می‌دهد که اغلب صنایع دارای چولگی مثبت هستند؛ به این معنا که توزیع بازده‌ها دارای دنباله راست طولانی‌تری است و احتمال وقوع بازده‌های مثبت بزرگ بیشتر از بازده‌های منفی بزرگ است. با این حال، وجود کشیدگی فراتر از مقدار نرمال در اکثر صنایع، حاکی از دنباله‌های سنگین و احتمال بالای وقوع نوسانات شدید است. آزمون جارک برا برای تمامی صنایع معنادار بوده که نشان‌دهنده انحراف معنادار توزیع بازده‌ها از حالت نرمال است. این یافته تأکید می‌کند که مدل‌های مبتنی بر فرض نرمال‌بودن - مانند مدل‌های واریانس ثابت یا رویکردهای میانگین-واریانس کلاسیک- برای تحلیل ریسک در بازار سهام ایران مناسب نیستند.

به طور کلی، نتایج آمار توصیفی مؤید آن است که بازده صنایع بورسی دارای رفتارهای ناهمسانی واریانس، چولگی، و دنباله‌های سنگین هستند؛ ویژگی‌هایی که ضرورت استفاده از مدل‌های پیشرفته‌ای همچون *GJR-GARCH* برای مدل‌سازی نوسان شرطی، *EVT* برای تحلیل دنباله ها و کاپولای ارشمیدسی برای وابستگی دنباله‌ای را در تحلیل ریسک و بهینه‌سازی پرتفوی توجیه می‌کند.

***جدول ۲**. پارامترهای برآوردی EVT (مدل GPD) در دنباله چپ بازده صنایع*

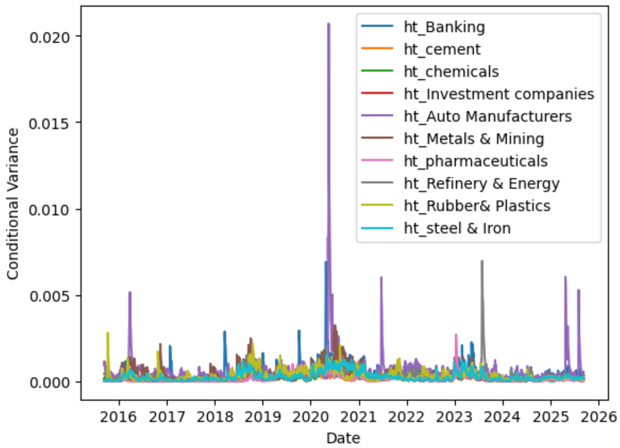
Table 2. Estimated EVT (GPD) Parameters for the Left Tail of Industry Returns

	ξ	β	آستانه دنباله چپ	p_0
بانک	۰/۶۶۶	۰/۴۱۵	−۱/۲۵۲	۰/۰۵
سیمان	۰/۱۶۸	۰/۵۳۰	−۱/۴۲۳	۰/۰۵
شیمیایی	۰/۰۲۹	۰/۵۵۳	−۱/۴۶۸	۰/۰۵
سرمایه گذاری	۰/۱۲۴	۰/۵۷۸	−۱/۳۹۵	۰/۰۵
خودرو	۰/۴۱۱	۰/۳۰۷	−۱/۵۶۳	۰/۰۵
کانه های فلزی و معادن	۰/۲۵۴	۰/۴۵۴	−۱/.۲۷۶	۰/۰۵
دارو	۰/۱۱۰	۰/۶۱۷	−۱/۲۸۴	۰/۰۵
فراورده های نفتی	۰/۱۰۶	۰/۴۷۶	−۱/۵۲۱	۰/۰۵
لاستیک و پلاستیک	۰/۲۰۱	۰/۵۱۶	−۱/۴۰۷	۰/۰۵
آهن و فولاد	۰/۰۳۵	۰/۴۹۹	−۱/۴۱۷	۰/۰۵

نتایج برآورد EVT بر پایه باقیمانده‌های استانداردشده مدل GJR-GARCH نشان می‌دهد که شدت ریسک‌های دنباله‌ای در میان صنایع ناهمگن است. مقدار پارامتر شکل ξ برای صنعت بانکداری برابر با ۰/۶۶۶ و برای صنعت خودروسازی حدود ۰/۴۱۱ برآورد شده که نشان‌دهنده وجود دنباله‌های ضخیم و احتمال بالاتر رخداد زیان‌های شدید در این صنایع است. در مقابل، صنایعی مانند مواد شیمیایی برابر۰/۰۲۹و فولاد و آهن برابر۰/۰۳۵ دارای دنباله‌های نسبتاً نازک‌تر بوده و رفتار حدی ضعیف‌تری را نشان می‌دهند. همچنین مقدار آستانه‌های منفی در بازه تقریباً ۱/۲۵− تا۱/۵۶ بیانگر تمرکز تحلیل بر ناحیه زیان‌های شدید

بازار است. تفاوت قابل توجه در پارامتر مقیاس (β) برای مثال حدود ۰/۳۰۷ در صنعت خودروسازی در مقابل ۰/۶۱۷ در صنعت دارویی نشان می‌دهد شدت شوک‌های حدی بین صنایع متفاوت است. این ناهمگنی عددی تأیید می‌کند که استفاده از کاپولاهای ارشمیدسی برای مدل‌سازی وابستگی نامتقارن و به‌کارگیری چارچوب بهینه‌سازی پایدار مبتنی بر CVaR از نظر آماری توجیه‌پذیر است، زیرا دارایی‌هایی با مقادیر ξ بزرگ‌تر معمولاً سهم کمتری در پرتفوی‌های پایدار دریافت می‌کنند.

واریانس شرطی سری بازدهی های شاخص صنایع. شکل ۲، واریانس شرطی محاسبه شده برای سری بازدهی های شاخص صنایع انتخابی را نشان می دهد. براین اساس، واریانس شرطی میان تمامی سری بازدهی شاخص صنایع در طول زمان ثابت نبوده و متغیر می باشد.



شکل ۲. *واریانس شرطی سری بازدهی های شاخص صنایع*

Figure 2. Conditional Variances of Industry Index Returns

جدول 3 *نتایج برازش مدل کاپولای ارشیمدسی*

Table 3. Goodness-of-Fit Results for Archimedean Copulas

نوع کاپولا	Log-Likelihood	تعداد پارامتر ها	AIC	BIC
گامبل	۱۲۸۹۶/۹	۴۵	−۲۵۷۰۴	−۲۵۴۴۴
فرانک	۱۴۲۷۰/۶	۴۵	−۲۸۴۵۱	−۲۸۱۹۱
کلایتون	۹۹۳۲/۵	۴۵	−۱۹۷۷۵	−۱۹۵۱۵

همان‌گونه که در جدول شماره ۳ مشاهده می‌شود، مقایسه معیارهای برازش نشان می‌دهد که کاپولای فرانک با مقدار Log-Likelihood برابر با ۱۴۲۷۰ بهترین عملکرد را در میان ساختارهای ارشمیدسی داشته است؛ در حالی‌که این مقدار برای کاپولای گامبل ۱۲۸۹۶.۹ و برای کاپولای ۹۹۳۲.۵ گزارش شده است. اختلاف حدود *1373/7* واحد میان گامبل و فرانک و بیش از۴۳۳۸ واحد میان فرانک و کلایتون بیانگر توان بالاتر کاپولای فرانک در توضیح ساختار وابستگی میان بازده صنایع است. از منظر معیارهای اطلاعاتی نیز نتایج مشابهی مشاهده می‌شود؛ به‌گونه‌ای که مقدار AIC برای کاپولای فرانک برابر با ۲۸۴۵۱- بوده که در مقایسه با مقادیر ۲۵۷۰۴- برای گامبل و ۱۹۷۷۵- برای کلایتون کوچک‌تر (منفی‌تر) است و نشان‌دهنده برازش بهتر این مدل می‌باشد. همین الگو در شاخص *BIC* نیز مشاهده می‌شود؛ به‌طوری‌که مقدار ۲۸۱۹۱- برای فرانک در مقایسه با ۲۵۴۴۴- برای گامبل و ۱۹۵۱۵-برای کلایتون نشان دهنده برتری آماری ساختار فرانک حتی پس از لحاظ جریمه

پیچیدگی مدل است. به‌طور کلی، برتری عددی کاپولای فرانک در هر سه شاخصLog-Likelihood ، AIC و BIC نشان می‌دهد که وابستگی میان بازده صنایع بیشتر در نواحی مرکزی توزیع متمرکز بوده و ساختارهای متقارن عملکرد بهتری نسبت به کاپولاهای دارای وابســتگی دنباله ای قوی از خود نشـــان داده اند. در مقابل، مقادیر بزرگ‌تر (کمتر منفی) AIC و BIC برای کاپولای کلایتون نشان می‌دهد که وابستگی دنباله چپ در داده‌ها نسبتاً ضعیف‌تر بوده و این ساختار نتوانسته است رفتار مشترک بازده‌ها را به اندازه سایر مدل‌ها توضیح دهد.

جدول 4. *وزن های بهینه شاخص صنایع در پرتفوی*

Table4 . Optimal Portfolio Weights of Industry Indices

شاخص صنایع	فرانک		کلایتون		گامبل	
	وزن		وزن		وزن	
	Mean-CVaR	**Robust-CVaR**	**Mean-CVaR**	**Robust-CVaR**	**Mean-CVaR**	**Robust-CVaR**
بانک	۰/۶٪	۷/۱٪	۰/۱٪	۵/۱٪	۰/۰٪	۱/۴٪
سیمان	۲۴/۰٪	۱۲/۳٪	۹/۷٪	۱۱/۱٪	۱۴/۸٪	۱۱/۶٪
شیمیایی	۱۲/۶٪	۱۱/۱٪	۲۲/۷٪	۱۲/۱٪	۲۳/۹٪	۱۲/۷٪
سرمایه گذاری	۵/۲٪	۱۰/۲٪	۵/۷٪	۱۰/.۰٪	۶/۴٪	۱۰/۸٪
خودرو	۰/۰٪	۶/۸٪	۰/۰٪	۶/۶٪	۰/۰٪	۷/۸٪
کانه های فلزی و معادن	۱۴/۴٪	۱۱/۰٪	۱۱/۱٪	۱۱/۲٪	۵/۸٪	۱۰/۹٪
دارو	۳۴/۴٪	۱۲/۹٪	۳۰/۵٪	۱۲/۵٪	۳۶/۴٪	۱۳/۷٪
فراورده های نفتی	۰/۰٪	۸/۶٪	۴/۴٪	۱۰/۳٪	۰/۵٪	۹/۷٪
لاستیک و پلاستیک	۵/۲٪	۱۰/۰٪	۵/۲٪	۱۰/۱٪	۲/۲٪	۱۰/۳٪
آهن و فولاد	۳/۷٪	۱۰/۰٪	۱۰/۵٪	۱۱/۰٪	۹/۹٪	۱۱/۰٪

همان‌گونه که نتایج جدول۴ نشان می‌دهد، ساختار وابستگی مدل‌شده توسط کاپولاهای ارشمیدسی منجر به الگوهای متفاوتی در تخصیص وزن‌های بهینه میان صنایع شده است. در چارچوبMean-CVaR ، کاپولای فرانک بیشترین تمرکز وزن را بر صنعت دارو با مقدار ۰/۳۴۳۷ و پس از آن صنعت سیمان با وزن ۰/۲۴قرار داده است؛ در حالی‌که برخی صنایع نظیر خودرو و فرآورده‌های نفتی عملاً وزن صفر دریافت کرده‌اند. این تمرکز وزنی نشان می‌دهد که ساختار وابستگی متقارن فرانک منجر به انتخاب دارایی‌هایی با ریسک مشترک کمتر در نواحی مرکزی توزیع شده است. در مقابل، با اعمال رویکردRobust-CVaR ، توزیع وزن‌ها در تمامی کاپولاها هموارتر شده است. به‌عنوان نمونه، در کاپولای فرانک وزن صنعت دارو از ۰/۳۴۳۷ در حالت Mean-CVaR به حدود ۰/۱۲۸ کاهش یافته، در حالی‌که صنایع دیگر نظیر خودرو (۰/۰۶۸) و فرآورده‌های نفتی (۰/۰۸۶۳) وارد پرتفوی شده‌اند. این تغییر نشان می‌دهد که لحاظ عدم‌قطعیت پارامتری موجب افزایش تنوع‌بخشی و کاهش تمرکز ریسک شده است.

الگوی مشابهی در کاپولای کلایتون نیز مشاهده می‌شود؛ به‌گونه‌ای که در حالت *Mean-CVaR* بیشترین وزن به صنعت شیمیایی (۰/۲۲۷۴) و دارو (۰/۳۰۴۶) اختصاص یافته، اما در نسخه پایدار وزن‌ها به محدوده‌ای نزدیک به ۰/۱۰ تا ۰/۱۲ برای

اغلب صنایع همگرا شده‌اند. این همگرایی بیانگر آن است که لحاظ وابستگی دنباله چپ همراه با رویکرد *Robust* موجب کاهش حساسیت پرتفوی نسبت به شوک‌های حدی شده است.

در کاپولای گامبل نیز، که وابستگی دنباله راست را مدل می‌کند، مشاهده می‌شود که وزن صنعت دارو در *Mean-CVaR* برابر با ۰/۳۶۴ بوده و بیشترین سهم را دارد، اما در نسخه پایدار به ۰/۱۳۷۲کاهش یافته و سایر صنایع مانند شیمیایی (۰/۱۲۷) و سرمایه‌گذاری (۰/۱۰۸) سهم بیشتری کسب کرده‌اند. این رفتار نشان می‌دهد که مدل‌های مبتنی بر وابستگی دنباله‌ای در حالت غیرپایدار تمایل به تمرکز وزنی دارند، در حالی‌که نسخه *Robust* توزیع متوازن‌تری ایجاد می‌کند.

به‌طور کلی، مقایسه عددی وزن‌ها میان سه کاپولای ارشمیدسی نشان می‌دهد که صرف‌نظر از نوع وابستگی مدل‌شده، اعمال چارچوب *Robust-CVaR* باعث کاهش تمرکز وزنی، ورود صنایع حذف‌شده در مدل استاندارد و افزایش پایداری ساختار پرتفوی شده است؛ موضوعی که از منظر مدیریت ریسک می‌تواند به کاهش آسیب‌پذیری پرتفوی در شرایط ناپایدار بازار منجر شود.

جدول ۵. *نسبت شارپ*

Table 5. Sharpe Ratios

کاپولا	مدل	معیار شارپ
کلایتون	Mean-CVaR	۰/۶۵۱
	Robust-CVaR	۰/۶۷۲
فرانک	Mean-CVaR	۰/۵۶۳
	Robust-CVaR	۰/۶۵۶
گامبل	Mean-CVaR	۰/۵۹۷
	Robust-CVaR	۰/۶۸۶

نتایج ارائه‌شده در جدول ۵ نشان می‌دهد که به‌کارگیری چارچوب *Robust-CVaR* در تمامی ساختارهای وابستگی مبتنی بر کاپولاهای ارشیمدسی، نسبت به مدل*Mean-CVaR* ، به بهبود معنادار معیار شارپ منجر شده است. در محاسبه این شاخص، نرخ بازده بدون ریسک معادل ۳۰ درصد سالانه در نظر گرفته شده که متناسب با شرایط اقتصاد کلان و ساختار نرخ بهره در بازار سرمایه ایران انتخاب شده است. با این حال، تفسیر این یافته‌ها باید در چارچوب مبانی نظری بهینه‌سازی پایدار صورت گیرد؛ زیرا در رویکرد *Robust Optimization* هدف صرفاً دستیابی به بیشترین عملکرد درون‌نمونه‌ای نیست، بلکه استخراج پرتفویی است که در برابر تغییرات پارامترهای مدل، نوسانات بازار و شرایط نامطمئن اقتصادی از پایداری بیشتری برخوردار باشد. در مدل‌های کلاسیک بهینه‌سازی، ساختار پرتفوی به شدت به مقادیر برآوردشده پارامترها وابسته است و همین موضوع می‌تواند موجب ناپایداری تخصیص دارایی در مواجهه با تغییرات بازار شود. در مقابل، چارچوب *Robust-CVaR* با لحاظ دامنه‌ای از حالات ممکن برای پارامترهای مدل و درنظرگرفتن عدم‌قطعیت موجود در محیط تصمیم‌گیری، پرتفویی استخراج می‌کند که از مقاومت بیشتری در برابر شوک‌های بازار برخوردار است. در این راستا، مقدار نسبت شارپ در کاپولای کلایتون از ۰/۶۵۱ در مدل *Mean-CVaR* به ۰/۶۷۲ در مدل *Robust-CVaR* افزایش یافته که بیانگر افزایش ۰/۰۲۱ واحدی این نسبت است. در کاپولای فرانک نیز مقدار شارپ از ۰/۵۶۳ به ۰/۶۵۶ رسیده و افزایش ۰/۰۹۳ واحدی را نشان می‌دهد. همچنین در کاپولای گامبل، نسبت شارپ از ۰/۵۷۹ به ۰/۶۸۶ افزایش یافته که معادل رشد ۰/۰۸۹ واحدی بوده و بالاترین مقدار را در میان ساختارهای وابستگی مورد بررسی به خود اختصاص داده است. بر این اساس، نتایج حاکی از آن است که ترکیب مدل‌سازی وابستگی غیرخطی از طریق کاپولاهای ارشیمدسی با چارچوب*Robust-CVaR* ، نه‌تنها به بهبود معیار ریسک–بازده در داده‌های

درون‌نمونه‌ای منجر شده، بلکه توانسته است پرتفویی با ثبات ساختاری بیشتر و حساسیت کمتر نسبت به شرایط نامطمئن بازار فراهم آورد. این یافته‌ها با مبانی نظری بهینه‌سازی پایدار سازگار بوده و نشان می‌دهد که لحاظ همزمان ریسک دنباله‌ای و عدم‌قطعیت پارامتری می‌تواند نقش مؤثری در ارتقای کیفیت تصمیمات سرمایه‌گذاری ایفا کند. با این حال، از آنجا که نتایج جدول ۵ مبتنی بر ارزیابی درون‌نمونه‌ای هستند، ارزیابی دقیق‌تر درباره برتری مدل‌ها مستلزم بررسی عملکرد آن‌ها در چارچوب آزمون‌های برون‌نمونه‌ای است. از این‌رو، در بخش بعد عملکرد پرتفوی‌های کلاسیک و پایدار با استفاده از پنجره‌های غلتان و داده‌های مشاهده‌نشده مورد ارزیابی قرار می‌گیرد.

تحلیل درون‌نمونه و ارزیابی برون‌نمونه‌ای با استفاده از پنجره‌های غلتان. در گام نخست، به‌منظور فراهم کردن مبنایی برای مقایسه نتایج، پارامترهای مدل‌های کاپولا بر اساس کل دوره مورد مطالعه برآورد شدند و نتایج درون‌نمونه استخراج گردید. این برآوردها تصویری از ساختار وابستگی میان صنایع در کل دوره زمانی پژوهش ارائه می‌کنند و به‌عنوان مرجعی برای ارزیابی پایداری پارامترها در چارچوب پنجره‌های غلتان مورد استفاده قرار می‌گیرند. به منظور ارزیابی عملکرد برون‌نمونه‌ای پرتفوی‌های حاصل از مدل‌های پیشنهادی و بررسی پایداری نتایج، از چارچوب پنجره‌های غلتان[1] استفاده شد. در این روش، ابتدا دوره ۱۳۹۴/۰۶/۱۸ تا ۱۳۹۸/۱۲/۲۹ به‌عنوان نخستین دوره برآورد[2] در نظر گرفته شد و تمامی مراحل مدل‌سازی شامل برآورد مدل GJR-GARCH، برازش نظریه مقدار حدی، تخمین پارامترهای کاپولا و محاسبه اوزان بهینه پرتفوی بر اساس داده‌های این دوره انجام گرفت. سپس اوزان به‌دست‌آمده در دوره آزمون سال ۱۳۹۹ اعمال و بازده محقق‌شده پرتفوی محاسبه شد. در این پژوهش، به‌منظور ارزیابی پویای عملکرد مدل‌ها، از رویکرد پنجره بازگشتی[3] استفاده شده است. در این چارچوب، پس از پایان هر دوره آزمون، مشاهدات جدید به مجموعه داده‌های مورد استفاده در مرحله برآورد افزوده شده و فرآیند تخمین پارامترها بر مبنای کل اطلاعات در دسترس تا آن مقطع زمانی تکرار می‌شود. بنابراین، حجم نمونه برآورد به‌تدریج افزایش یافته و اطلاعات تاریخی پیشین نیز در فرآیند تخمین حفظ می‌شوند. این رویه تا پایان دوره زمانی مورد مطالعه ادامه یافته و در هر مرحله، پارامترهای مدل و اوزان بهینه پرتفوی بر اساس مجموعه اطلاعات به‌روزشده مجدداً محاسبه شده‌اند. بر این اساس، سال ۱۳۹۹ به‌عنوان پنجره آزمون *W1* ، سال ۱۴۰۰ به‌عنوان *W2* ، سال ۱۴۰۱ به‌عنوان *W3* ، سال ۱۴۰۲ به‌عنوان *W4* ، سال ۱۴۰۳ به‌عنوان *W5* و سال ۱۴۰۴ به‌عنوان *W6* در نظر گرفته شد. در هر یک از این پنجره‌ها، تمامی مراحل برآورد مدل، برازش توزیع‌های دنباله‌ای، تخمین ساختار وابستگی و محاسبه اوزان بهینه پرتفوی مجدداً انجام شد و سپس عملکرد پرتفوی‌ها در دوره آزمون مورد ارزیابی قرار گرفت.

جدول ۶. *نتایج برآورد پارامترهای کاپولا های ارشمیدسی در درون نمونه و چارچوب پنجره‌های غلتان*

Table 6. Estimated Parameters of Archimedean Copulas for the In-Sample Period and Rolling Window Analysis

پنجره زمانی	سال آزمون	کلایتون (α)	گامبل(θ)	فرانک (α)
درون نمونه	کل دوره	۰/۹۶۸۵	۱/۴۸۴۳	۳/۲۲
W1	۱۳۹۹	۰/۵۴۱	۱/۲۷۱	۱/۹۵۳
W2	۱۴۰۰	۰/۷۰۸	۱/۳۵۴	۲/۴۵۳
W3	۱۴۰۱	۰/۸۱۲	۱/۴۰۶	۲/۷۴۴
W4	۱۴۰۲	۰/۸۷۳	۱/۴۳۶	۲/۹۱۷

[1] Rolling Window
[2] Estimation Window
[3] Expanding Window

۳/۱۵۲	۱/۴۷۹	۰/۹۵۸	۱۴۰۳	**W5**
۳/۳۴۸	۱/۵۱۵	۱/۰۳	۱۴۰۴	**W6**

نتایج جدول ۶ نشان می‌دهد که مقادیر درون‌نمونه پارامترهای وابستگی برای کاپولاهای کلایتون، گامبل و فرانک به‌ترتیب برابر با ۰/۹۶۸۵، ۱/۴۸۴۳ و ۳/۲۲ بوده است. این مقادیر بیانگر وجود ساختار وابستگی میان صنایع در کل دوره مورد مطالعه بوده و به‌عنوان مبنایی برای مقایسه نتایج حاصل از پنجره‌های غلتان مورد استفاده قرارمی گیرند. پارامترهای وابستگی در تمامی کاپولاها طی پنجره‌های زمانی مختلف روندی افزایشی داشته‌اند. افزایش پارامتر کلایتون از ۰/۵۴۱ به ۱/۰۳۰ بیانگر تشدید وابستگی دنباله چپ و افزایش احتمال زیان‌های همزمان میان صنایع است. همچنین افزایش پارامتر گامبل از ۱/۲۷۱ به ۱/۵۱۵ نشان می‌دهد که شدت هم‌حرکتی صنایع در دوره‌های رونق نیز تقویت شده است. بیشترین رشد مربوط به کاپولای فرانک است که پارامتر آن از ۱/۹۵۳ به ۳/۳۴۸ افزایش یافته و بیانگر تقویت وابستگی کلی میان صنایع در طول زمان است. این نتایج نشان می‌دهد که ساختار وابستگی بازار در طول دوره مورد مطالعه ثابت نبوده و وجود عدم‌قطعیت پارامتری را تأیید می‌کند؛ موضوعی که استفاده از چارچوب بهینه‌سازی پایدار را از منظر تجربی توجیه می‌نماید.

جدول ۷. نسبت شارپ برای داده های برون نمونه ای

Table 7. Sharpe Ratios Obtained from the Out-of-Sample Analysis

Robust-CVaR	**Mean-CVaR**	**پنجره زمانی**	**کاپولا**
۴/۰۱۹	۳/۸۰۱	*W1*	کلایتون
۴/۰۸۷	۳/۹۱۲	*W2*	
۴/۱۱۸	۴/۰۲۵	*W3*	
۴/۱۳۲	۴/۰۷۱	*W4*	
۴/۱۴۵	۴/۱۱۸	*W5*	
۴/۱۳۸	۴/۰۹۶	*W6*	
۴/۱۳۷	۴/۱۰۸	*W1*	گامبل
۴/۱۴۲	۴/۱۲۶	*W2*	
۴/۱۴۸	۴/۱۳۹	*W3*	
۴/۱۴۶	۴/۱۵۱	*W4*	
۴/۱۵۱	۴/۱۶۲	*W5*	
۴/۱۵۸	۴/۱۷	*W6*	
۴/۱۳۹	۴/۰۹۲	*W1*	فرانک
۴/۱۴۵	۴/۱۱۸	*W2*	
۴/۱۴۹	۴/۱۳۶	*W3*	
۴/۱۴۴	۴/۱۴۸	*W4*	
۴/۱۴۷	۴/۱۵۷	*W5*	
۴/۱۵۲	۴/۱۶۵	*W6*	

همان‌طور که در جدول ۷ مشاهده می‌شود، نتایج برون‌نمونه‌ای نشان می‌دهد که عملکرد رویکرد پایدار به ساختار وابستگی میان صنایع وابسته است. در کاپولای کلایتون، پرتفوی *Robust-CVaR* در تمامی شش پنجره آزمون نسبت شارپ بالاتری نسبت به مدل *Mean-CVaR* کسب کرده است که بیانگر اثربخشی رویکرد پایدار در شرایطی است که وابستگی دنباله چپ و ریسک سرایت زیان‌ها نقش پررنگ‌تری دارند. در مقابل، در کاپولاهای گامبل و فرانک اختلاف عملکرد دو رویکرد محدود بوده و برتری میان آن‌ها در پنجره‌های مختلف جابه‌جا شده است. با این حال، میانگین نسبت شارپ *Robust-CVaR* در هر سه ساختار وابستگی اندکی بالاتر از مدل کلاسیک بوده است. این یافته نشان می‌دهد که لحاظ عدم‌قطعیت پارامترها می‌تواند پایداری عملکرد پرتفوی را در شرایط واقعی بازار بهبود بخشد و حساسیت نتایج را نسبت به خطاهای برآورد کاهش دهد. نتایج فوق نشان می‌دهد که مزیت رویکرد پایدار صرفاً به نتایج درون‌نمونه‌ای محدود نبوده و در چارچوب ارزیابی برون‌نمونه‌ای نیز قابل مشاهده است؛ موضوعی که از پایداری نسبی اوزان بهینه و قابلیت تعمیم‌پذیری بیشتر رویکرد *Robust-CVaR* نسبت به مدل کلاسیک حکایت دارد.

۵. نتیجه‌گیری و پیشنهادها

پژوهش حاضر با هدف طراحی چارچوبی برای بهینه‌سازی پایدار پرتفوی مبتنی بر معیار ارزش در معرض ریسک شرطی و با استفاده از مدل *GJR-GARCH* ، نظریه مقدار حدی و کاپولاهای ارشمیدسی انجام شد. نتایج نشان داد که بازده صنایع منتخب بورس تهران دارای ویژگی‌هایی نظیر خوشه‌بندی نوسان، چولگی، کشیدگی و رفتارهای دنباله‌ای است و بنابراین استفاده از روش‌های متعارف مبتنی بر فروض نرمال نمی‌تواند تصویری دقیق از ریسک ارائه دهد.

برآورد مدل *GJR-GARCH* وجود ناهمسانی واریانس شرطی را در اغلب صنایع تأیید کرد و نتایج نظریه مقدار حدی نیز بیانگر تفاوت معنادار در شدت ریسک‌های دنباله‌ای میان صنایع مختلف بود. در بخش وابستگی، نتایج نشان داد که روابط میان صنایع صرفاً خطی نبوده و استفاده از کاپولاها توانایی بیشتری در توصیف ساختار وابستگی میان بازده‌ها دارد. همچنین بررسی پنجره‌های غلتان نشان داد که پارامترهای وابستگی در طول زمان تغییر می‌کنند و نمی‌توان آن‌ها را ثابت فرض کرد.

مقایسه اوزان بهینه حاصل از دو رویکرد *Mean-CVaR* و *Robust-CVaR* نشان داد که مدل کلاسیک تمایل بیشتری به تمرکز سرمایه‌گذاری بر تعداد محدودی از صنایع دارد، در حالی که رویکرد پایدار موجب توزیع متعادل‌تر اوزان و افزایش تنوع‌بخشی در پرتفوی می‌شود. نتایج معیارهای عملکرد نیز نشان داد که لحاظ عدم‌قطعیت پارامتری در اکثر موارد به بهبود عملکرد تعدیل‌شده بر حسب ریسک منجر شده است .یافته‌های حاصل از ارزیابی برون‌نمونه‌ای نیز این نتایج را تا حد زیادی تأیید کرد. بررسی شش پنجره آزمون متوالی نشان داد که عملکرد پرتفوی پایدار در اغلب دوره‌ها حداقل معادل و در برخی موارد بهتر از مدل کلاسیک بوده است. این موضوع به‌ویژه در کاپولای کلایتون که وابستگی دنباله چپ را مدل‌سازی می‌کند، آشکارتر بود. این نتایج بیانگر آن است که در شرایطی که ساختار وابستگی بازار و پارامترهای مدل در طول زمان تغییر می‌کنند، در نظر گرفتن عدم‌قطعیت برآوردها می‌تواند به تصمیم‌گیری‌های پایدارتر منجر شود .به طور کلی، نتایج این پژوهش نشان می‌دهد که ترکیب مدل‌های نوسان شرطی، نظریه مقدار حدی، کاپولاهای ارشمیدسی و بهینه‌سازی پایدار می‌تواند چارچوب مناسبی برای مدیریت ریسک و تشکیل پرتفوی در بازار سرمایه ایران فراهم کند .برای پژوهش‌های آتی پیشنهاد می‌شود عملکرد این چارچوب در حضور کاپولاهای پویا، تغییر رژیم‌های بازار و داده‌های با فرکانس بالاتر مورد بررسی قرار گیرد. همچنین مقایسه رویکرد

*Robust-CVaR*با سایر معیارهای ریسک می‌تواند به توسعه مطالعات آتی در حوزه مدیریت ریسک و بهینه‌سازی پرتفوی کمک کند.

تعارض منافع. برای ارائه مطالب و نگارش این مقاله هیچ‌گونه کمک مالی از هیچ فرد، نهاد و سازمانی دریافت نشده است و نتایج و دستاوردهای این مقاله به نفع یا ضرر سازمان یا فردی خاص نخواهد بود. حضور نویسندگان در این پژوهش به عنوان شاهدی بی‌طرف ولی متخصص بوده است و نویسندگان هیچ‌گونه تعارض منافعی ندارند.

Reference

Acerbi, C., Tasche, D. (2002). "On the coherence of expected shortfall". *Journal of Banking & Finance*, Vol. 26, No. 7, pp. 1487–1503.

Alizadeh,ali,Fallah,Mirfeiz.(2021).The assessment of extreme value theory and Copula - Garch models in prediction of value at risk and the expected short fall in portfolio Investment Company in Tehran stock exchange..*Financial Engineering and Portfolio Management*,46,340-364. (in persian)

Baillie, R.T., Bollerslev, T., Mikkelsen, H.O. (1996). "Fractionally integrated generalized autoregressive conditional heteroskedasticity". *Journal of Econometrics*, Vol. 74, No. 1, pp. 3–30.

Ben-Tal, A., El Ghaoui, L., & Nemirovski, A. (2009). Robust Optimization. Princeton University Press.

Blanchet, Chen, & Zhou (2022)"Distributionally robust mean-variance portfolio selection with Wasserstein distances".*Management Science*, 68(9), 6382–6410.

Bollerslev, T. (1986). "Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity". *Journal of Econometrics*, Vol. 31, No. 3, pp. 307–327.

Brooks, C. (2019). Introductory Econometrics for Finance (4th ed.). Cambridge University Press.

Bruhn, A., & Ernst, D. (2022). Assessing cryptocurrency market risk characteristics using a GARCH–EVT–Copula framework. *Finance Research Letters*, 46, 102334.

Cont, R. (2001). "Empirical properties of asset returns: Stylized facts and statistical issues". *Quantitative Finance,* Vol. 1, No. 2, pp. 223–236.

DeMiguel, V., Garlappi, L., Uppal, R. (2009). "Optimal versus naive diversification: How inefficient is the 1/N portfolio strategy?". Review of Financial Studies, Vol. 22, No. 5, pp. 1915–1953.

Ding, Z., Granger, C.W.J., Engle, R.F. (1993). "A long memory property of stock market returns and a new model". *Journal of Empirical Finance*, Vol. 1, No. 1, pp. 83–106.

Embrechts, P., Klüppelberg, C., Mikosch, T. (1997). Modelling Extremal Events for Insurance and Finance. *Berlin*: Springer.

Embrechts, P., McNeil, A.J., Straumann, D. (2002). "Correlation and dependence in risk management: Properties and pitfalls". In: Risk Management: Value at Risk and Beyond. Cambridge: *Cambridge University Press*, pp. 176–223.

Engle, R.F. (1982). "Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation". Econometrica, Vol. 50, No. 4, pp. 987–1007.

Engle, R.F. (2002). "Dynamic conditional correlation: A simple class of multivariate generalized autoregressive conditional heteroskedasticity models". *Journal of Business & Economic Statistics*, 20(3), 339–350.

Fabozzi, F.J., Huang, D., Zhou, G. (2010). "Robust portfolios: Contributions from operations research and finance". *Annals of Operations Research*, 176(1), 191–220.

Garlappi, L., Uppal, R., Wang, T. (2007). "Portfolio selection with parameter and model uncertainty: A multi-prior approach". *Review of Financial Studies*, 20(1). 41–81.

Glosten, L. R., Jagannathan, R., & Runkle, D. E. (1993). On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks. *The Journal of Finance*, 48(5), 1779–1801.

Hamidieh, A. , Kaviani, M. and Akhgari, B. A. (2023). Robust Portfolio Optimization under Interval-

valued Conditional Value-at-Risk (CVaR) Criterion in the Tehran Stock Exchange. *Financial Research Journal*, 25(3), 508-528. (in persian).
Ho, K. Y., & Kercheval, A. N. (2007). A generalized hyperbolic approach to Value-at-Risk estimation. *Journal of Risk Finance*, 8(4), 381–393.
Jarque, C.M., Bera, A.K. (1987). “A test for normality of observations and regression residuals”. *International Statistical Review*, 55(2), 163–172.
Joe, H. (2014). Dependence Modeling with Copulas. Boca Raton: CRC Press.
Karmakar, M., & Simon, C. (2015). Risk management using GARCH–EVT–Copula models: Application to portfolio optimization. *Quantitative Finance*, 15(9), 1559–1573.
Karmakar, M., & Simon, C. P. (2015). Portfolio optimization using GARCH-EVT-Copula approach: Evidence from the Indian stock market. *International Journal of Economics and Finance*, 7(3), 215–229.
Lee, T. H., Long, X., & Chen, Y. (2016). Portfolio risk measurement with GARCH–EVT–Copula models: Evidence from international equity markets. *Economic Modelling*, 54, 286–296.
Longin, F. (2000). “From value at risk to stress testing: The extreme value approach”. *Journal of Banking & Finance*, 24(7), 1097–1130.
Mandelbrot, B. (1963). “The variation of certain speculative prices”. *Journal of Business*, 36(4), 394–419.
Markowitz, H. (1952). “Portfolio selection”. *Journal of Finance*, 7(1), 77–91.
McNeil, A.J., Frey, R. (2000). “Estimation of tail-related risk measures for heteroskedastic financial time series: An extreme value approach”. *Journal of Empirical Finance*, 7(3), 271–300.
McNeil, A.J., Frey, R., Embrechts, P. (2015). Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools (2nd ed.). *Princeton*: Princeton University Press.
Merton, R.C. (1972). “An analytic derivation of the efficient portfolio frontier”. *Journal of Financial and Quantitative Analysis,* 7(4), 1851–1872.
Michaud, R. O. (1989). The Markowitz optimization enigma: Is 'optimized' optimal? *Financial Analysts Journal*, 45(1), 31–42.
Nelsen, R.B. (2006). An Introduction to Copulas (2nd ed.). New York: Springer.
Patton, A.J. (2006). “Modelling asymmetric exchange rate dependence”. *International Economic Review*, 47(2),527–556.
Patton, A.J. (2012). “A review of copula models for economic time series”. *Journal of Multivariate Analysis*, 110(1), 4–18.
Pflug, G.C., Pichler, A. (2014). Multistage Stochastic Optimization. Cham: Springer.
Pratt, J. W. (1964). Risk aversion in the small and in the large. Econometrica, 32(1–2), 122–136.
Rockafellar, R. T., & Uryasev, S. (2000). Optimization of conditional value-at-risk. *Journal of Risk*, 2(3), 21–41.
Sahamkhadam, M., Arouri, M., & Teulon, F. (2018). Tail risk dependence and portfolio optimization: A GARCH–EVT–Copula approach. *Research in International Business and Finance*, 46, 500–513.
Sampid, P., Chen, R., & Lee, W. (2017). Value-at-Risk estimation using elliptical GARCH, copula and EVT approaches. *International Review of Financial Analysis*, 52, 1–12.
Silvennoinen, A., Teräsvirta, T. (2009). “Multivariate GARCH models”. In: Handbook of Financial Time Series. *Berlin: Springer*, 201–229.
Sklar, A. (1959). “Distribution functions in n dimensions and their margins”. Publications de l’Institut de Statistique de l’Université de Paris, 8, 229–231.
Tondnevis, F. and Valamehr, H. (2025). Probabilistic Forecasting and Robust Optimization for Managing Uncertainty in Smart Beta Portfolio Optimization. *Financial Research Journal*, 27(2), 508-530. (in persian)
Von Neumann, J., & Morgenstern, O. (1944). Theory of Games and Economic Behavior. Princeton University Press.
Zhang, Y. (2011). Mean–Conditional Value-at-Risk portfolio optimization under heavy-tailed distributions. *Journal of Banking & Finance*, 35(3), 646–658.