Fin. Manag. Persp. 2026, 16(1), 9-37; DOI: 10.48308/jfmp.2026.243653.1578

Financial Management Perspective
Journal homepage: https://jfmp.sbu.ac.ir/

Original Article

Enhanced Index Tracking via Omega-CVaR Optimization: A Downside Risk Perspective

Mahdi Dehghani Ashkezari*
Saeed Fallahpour**
Ali Namaki**
Farhad Rahbar***

Abstract

Introduction: This study aims to develop and evaluate a novel portfolio optimization framework for enhanced index tracking. Enhanced index tracking is an intermediate strategy between active and passive portfolio management, in which the goal is to construct a portfolio from the constituents of a benchmark index so as to closely follow the index while achieving returns above the benchmark. The main objective is to jointly pursue "return enhancement" and "strict control of tail risk" in financial markets where returns may exhibit skewness, excess kurtosis, and extreme events. In such environments, relying solely on conventional variance-based risk measures may underestimate downside risks and thereby expose portfolio-weighting decisions to substantial losses. The proposed framework employs the *Omega* ratio as a distribution-based performance measure and Conditional Value at Risk (*CVaR*) as a downside risk control metric, with the aim of generating excess returns over the benchmark while enhancing the portfolio's resilience to severe losses.

Methods: The proposed framework is formulated as an *Omega–CVaR* optimization problem. The objective function maximizes the *Omega* ratio of the tracking portfolio in order to improve the ratio of returns above a specified threshold to losses below that threshold. Simultaneously, *CVaR* is imposed as a constraint to control downside risk by limiting the mean of large losses in the tail of the return distribution. Operational

Received: Januray . 21, 2026 Accepted: May. 3, 2026

* PhD Candidate, Financial Engineering, Faculty of Accounting and Finance, College of Management, University of Tehran, Tehran, Iran. (Corresponding Author). **E-mail**: mahdidehghani@ut.ac.ir
** Associate Professor, Financial Engineering, Faculty of Accounting and Finance, College of Management, University of Tehran, Tehran, Iran.
*** Professor, Faculty of Economics, University of Tehran, Tehran, Iran.

.

constraints include full investment, minimum/maximum weight bounds of 0% and 50% to prevent excessive concentration, and asset selection restricted to the constituents of the benchmark index. The empirical assessment is conducted using 30 rolling time windows; in each iteration, 52 weeks of in-sample data are used for estimation and 12 weeks of out-of-sample data are used for performance evaluation. The study period spans approximately eight years (from late January 2018 to late December 2025), and the results are compared with those of the Tehran Exchange Price Index (TEPIX) and a competing model based on conventional constraints/objectives.

Finding: The results indicate that the *Omega–CVaR* framework delivers a substantial long-term advantage in terms of cumulative returns relative to both the TEPIX and the competing model. The cumulative return of the proposed portfolio is reported at 2,546%, compared with 1,350% for the TEPIX. Analyzing the time path of performance across rolling windows shows that the primary advantage of the model does not necessarily stem from "persistent weekly outperformance," but rather from two complementary mechanisms. First, the *CVaR* constraint, by limiting the average losses beyond the confidence level, reduces the depth of drawdowns during bearish phases. Second, maximizing the *Omega* ratio leads to a weight allocation that increases the share of desirable returns relative to undesirable losses, enabling the portfolio to better exploit the "compounding effect" during recovery periods following downturns. Nonetheless, statistical tests reveal that at weekly horizons, the model's outperformance relative to the TEPIX and competing models is not consistently and significantly confirmed. This pattern is consistent with the defensive nature of the portfolio, as evidenced by an average beta of about 0.43, indicating lower sensitivity to market fluctuations than the TEPIX.

Conclusions: The findings suggest that the *Omega–CVaR* framework is an effective tool for enhanced index tracking in volatile markets characterized by extreme risks. Although statistically significant short-term outperformance is not observed, effective control of severe losses and reinforcement of the compounding effect can ultimately lead to higher cumulative returns over the long run. This strategy is particularly recommended for investors seeking lower risk and greater stability in their portfolios, especially in markets with non-normal return distributions.

Keywords: Active Portfolio Management; Conditional Value-at-Risk (*CVaR*); Enhanced Index Tracking; Omega Ratio; Portfolio Optimization; Tail Risk.

How to Cite Dehghani Ashkezari, M., Fallahpour, S., Namaki, A., and Rahbar, F., (2026). Enhanced Index Tracking via Omega-CVaR Optimization: A Downside Risk Perspectiv. *Financial Management Perspective*,16 (1),9-37. *(In Persian).*

چشم انداز مدیریت مالی، ۱۴۰۵، دوره ۱۶، شماره ۱ صص ۹-۳۷، DOI: 10.48308/jfmp.2026.243653.1578

چشم انداز مدیریت مالی
Journal homepage: https://jfmp.sbu.ac.ir/

نوع مقاله: پژوهشی

ردیابی بهبودیافته شاخص از طریق بهینه‌سازی $Omega - CVaR$: با رویکرد کنترل ریسک نامطلوب

مهدی دهقانی اشکذری*
سعید فلاح‌پور**
علی نمکی***
فرهاد رهبر****

چکیده

هدف: این پژوهش با هدف توسعه و ارزیابی چارچوبی نوین در بهینه‌سازی پرتفوی به‌منظور ردیابی بهبودیافته شاخص است. ردیابی بهبودیافته شاخص راهبردی میان مدیریت فعال و غیرفعال پرتفوی است که در آن هدف تشکیل پرتفویی از سهام موجود در یک شاخص ضمن حفظ حرکت شاخص و در عین حال، کسب بازده‌ای فراتر از بازده شاخص است. درواقع هدف اصلی، تلفیق «کسب بازده» با «کنترل سخت‌گیرانه ریسک دنباله‌ای» در بازارهای مالی است که بازده‌ها می‌توانند چولگی، کشیدگی و رخدادهای حدی داشته باشند. بر این اساس، اتکای صرف به معیارهای متعارف مبتنی بر واریانس ممکن است ریسک‌های نامطلوب را کم‌برآورد کند و درنتیجه تصمیم‌های وزن‌دهی مبتنی بر آن، پرتفوی را در معرض زیان‌های سنگین قرار دهد. چارچوب پیشنهادی با استفاده از نسبت امگا $(Omega\ Ratio)$ به‌عنوان معیار کارایی مبتنی بر توزیع و ارزش در معرض ریسک شرطی $(CVaR)$ به‌عنوان معیار کنترل ریسک نامطلوب، تلاش می‌کند ضمن کسب بازده مازاد بر شاخص معیار، مقاومت پرتفوی را در برابر زیان‌های شدید افزایش دهد.

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۱۱/۰۱ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۰۲/۱۳

* دانشجو دکتری مالی، گروه مهندسی مالی، دانشکده حسابداری و علوم مالی، دانشکدگان مدیریت، دانشگاه تهران، تهران، ایران. (نویسنده مسئول). E-Mail: mahdidehghani@ut.ac.ir

** دانشیار، گروه مهندسی مالی، دانشکده حسابداری و علوم مالی، دانشکدگان مدیریت، دانشگاه تهران، تهران، ایران.
*** استادیار، گروه مهندسی مالی، دانشکده حسابداری و علوم مالی، دانشکدگان مدیریت، دانشگاه تهران، تهران، ایران.
**** استاد، دانشکده اقتصاد، دانشگاه تهران، تهران، ایران.

روش: چارچوب پیشنهادی به‌صورت یک مسئله بهینه‌سازی $Omega-CVaR$ تعریف می‌شود. تابع هدف، بیشینه‌سازی نسبت امگا برای پرتفوی ردیاب است تا نسبت بازده‌های بالاتر از سطح آستانه به زیان‌های پایین‌تر از آستانه بهبود یابد. هم‌زمان، ارزش در معرض ریسک شرطی ($CVaR$) به‌عنوان قید کنترل ریسک نامطلوب اعمال می‌شود تا میانگین زیان‌های بزرگ در ناحیه دنباله توزیع بازده محدود گردد. قیود عملیاتی شامل سرمایه‌گذاری کامل، کران‌های حداقل/حداکثر وزن به‌ترتیب صفر و پنجاه درصد برای جلوگیری از تمرکز و انتخاب دارایی‌ها از میان سهام تشکیل‌دهنده سبد مرجع در نظر گرفته می‌شود. ارزیابی تجربی با ۳۰ پنجره زمانی غلتان انجام می‌گیرد؛ در هر تکرار، ۵۲ هفته داده داخل‌نمونه برای برآورد و ۱۲ هفته داده خارج‌نمونه برای سنجش عملکرد استفاده می‌شود. دوره بررسی حدود هشت سال (از ابتدای بهمن ۱۳۹۶ تا پایان آذر ۱۴۰۴) بوده و نتایج با شاخص قیمتی بورس تهران و مدل رقیب مبتنی بر قیود/اهداف مرسوم مقایسه می‌شود.

یافته‌ها: نتایج نشان داد که چارچوب $Omega-CVaR$ در افق بلندمدت، برتری قابل‌ملاحظه‌ای در بازده تجمعی نسبت به شاخص قیمتی بورس تهران و مدل رقیب ایجاد کرده است. بازده تجمعی پرتفوی پیشنهادی ۲,۵۴۶ درصد و بازده تجمعی شاخص قیمتی بورس تهران ۱,۳۵۰ درصد گزارش شد. تحلیل مسیر زمانی عملکرد در پنجره‌های غلتان بیانگر آن بود که مزیت اصلی مدل لزوماً به «برتری هفتگی پایدار» وابسته نیست، بلکه از دو سازوکار مکمل ناشی می‌شود: اول، قید $CVaR$ با محدود کردن میانگین زیان‌های فراتر از سطح اطمینان، عمق افت‌های پرتفوی را در فازهای نزولی کاهش می‌دهد. دوم، بیشینه‌سازی نسبت امگا باعث تخصیص وزن‌ها به گونه‌ای می‌شود که سهم بازده‌های مطلوب نسبت به زیان‌های نامطلوب افزایش یابد و پس از دوره‌های نزولی، پرتفوی امکان بهره‌گیری بهتر از «اثر ترکیب سود» را در دوره‌های بازیابی پیدا کند. با این حال، ارزیابی‌های آماری نشان داد که در افق‌های هفتگی، برتری مدل نسبت به شاخص قیمتی بورس تهران و مدل‌های رقیب به صورت معنادار و یکنواخت تأیید نمی‌شود. این امر با ماهیت تدافعی پرتفوی سازگار است؛ به‌طوری‌که ضریب بتای میانگین حدود ۰/۴۳ به دست آمده و حساسیت پرتفوی به نوسانات بازار را پایین‌تر از شاخص قیمتی بورس تهران نشان می‌دهد.

نتیجه‌گیری: یافته‌ها نشان می‌دهد چارچوب $Omega-CVaR$ ابزاری کارآمد برای ردیابی بهبودیافته شاخص در محیط‌های مالی پرنوسان و دارای ریسک‌های حدی است. هرچند برتری معنادار آماری در کوتاه‌مدت مشاهده نمی‌شود، کنترل مؤثر زیان‌های شدید و تقویت اثر ترکیب سود می‌تواند در نهایت به انباشت بازده تجمعی بالاتر در بلندمدت منجر شود. این راهبرد به سرمایه‌گذارانی که به‌دنبال کاهش ریسک و پایداری بیشتر در پرتفوی خود هستند، به‌ویژه در بازارهای با توزیع بازده نامتعارف، توصیه می‌شود.

کلیدواژه‌ها: ارزش در معرض ریسک شرطی؛ بهینه‌سازی پرتفوی؛ ردیابی بهبودیافته شاخص؛ ریسک دنباله‌ای؛ مدیریت فعال پرتفوی؛ نسبت امگا

استناد دهی: دهقانی اشکذری، مهدی؛ فلاح‌پور، سعید؛ نمکی، علی و رهبر، فرهاد. (۱۴۰۵). ردیابی بهبودیافته شاخص از طریق بهینه‌سازی $Omega-CVaR$: با رویکرد کنترل ریسک نامطلوب. *چشم انداز مدیریت مالی*، ۱۶(۱)، ۹-۳۷.

۱. مقدمه

امروزه در کشورهای توسعه‌یافته و درحال‌توسعه، بازار سرمایه یکی از مهم‌ترین نشانگرهای توصیف وضعیت اقتصادی و نیز یکی از اصلی‌ترین بسترهای سرمایه‌گذاری افراد و تأمین مالی شرکت‌ها و بنگاه‌های اقتصادی به شمار می‌رود. انگیزه‌ی غالب سرمایه‌گذاران از ورود به بازار سرمایه، افزایش ثروت و بهبود رفاه مالی در گذر زمان است؛ ازاین‌رو شناخت و طراحی سازوکارهایی که بتوانند بیشترین منفعت را با سطح ریسک قابل‌قبول برای سرمایه‌گذاران فراهم آورند، اهمیت ویژه‌ای دارد. این اهمیت در شرایطی دوچندان می‌شود که بازارها با دوره‌های رونق و رکود، جهش‌های قیمتی و زیان‌های حدی مواجه‌اند و تصمیم‌گیری صرفاً بر مبنای برداشت‌های شهودی می‌تواند پیامدهای پرهزینه‌ای به همراه داشته باشد.

یکی از چالش‌های بنیادی سرمایه‌گذاران، چگونگی تخصیص ثروت میان دارایی‌های در دسترس با هدف کسب بیشترین بازده احتمالی و هم‌زمان کاهش ریسک سرمایه‌گذاری است. از آنجا که بازده و ریسک دو مؤلفه‌ی اصلی تصمیم‌های سرمایه‌گذاری هستند، سرمایه‌گذاران عقلایی[1] تلاش می‌کنند با تنوع‌بخشی[2] و تشکیل پرتفوی، بازده مورد انتظار را افزایش داده و ریسک را تا حد امکان مدیریت کنند. در عمل نیز بسیاری از سرمایه‌گذاران، اطمینان خاطر را بر عدم‌اطمینان ترجیح می‌دهند و مایل‌اند در ازای کاهش ریسک، از بخشی از بازده بالقوه چشم‌پوشی کنند. بنابراین، مسئله‌ی تخصیص بهینه منابع مالی به یکی از مباحث محوری در تصمیم‌گیری‌های سرمایه‌گذاری تبدیل شده است و اتخاذ تصمیم مؤثر در این حوزه نیازمند بهره‌گیری از ابزارها و تکنیک‌های کارآمد است.

در مدیریت پرتفوی، انتخاب میان دو رویکرد مدیریت فعال[3] و مدیریت غیرفعال[4] نقش تعیین‌کننده‌ای در عملکرد سرمایه‌گذاری دارد. در مدیریت فعال، مدیر پرتفوی با درجه‌ای بالاتر از انعطاف‌پذیری می‌کوشد با تحلیل اطلاعات و انتخاب اوراق بهادار، بازده‌ای فراتر از بازده بازار به‌دست آورد؛ درحالی‌که در مدیریت غیرفعال، هدف اصلی تکرار عملکرد یک معیار ازپیش‌تعیین‌شده (معمولاً یک شاخص) با حداقل مداخله و هزینه است. تجربه بازارهای مالی نشان داده است که اگرچه برخی صندوق‌های فعال ممکن است در بازه‌های کوتاه‌مدت عملکردی بهتر از شاخص داشته باشند، اما حفظ این برتری در بلندمدت دشوار بوده و ناپایداری عملکرد صندوق‌های فعال، ریسک بیشتری را متوجه سرمایه‌گذاران می‌کند. از سوی دیگر، هزینه‌های مدیریتی بالاتر صندوق‌های فعال می‌تواند بخشی از بازده ناخالص را مستهلک کرده و بازده خالص سرمایه‌گذار را کاهش دهد. این مجموعه عوامل، توجه به راهبردهای مبتنی بر شاخص و توسعه‌ی نسخه‌های کارآمدتر آن را تقویت کرده است.

یکی از تکنیک‌های شناخته‌شده در مدیریت غیرفعال، ردیابی شاخص[5] است که بر مبنای نظریه کارایی بازار[6]، تلاش می‌کند پرتفویی با رفتار نزدیک به شاخص مرجع ایجاد کند. ساده‌ترین شیوه ردیابی شاخص، خرید و نگهداری تمامی اجزای شاخص با وزن‌های متناظر است که به «بازسازی کامل[7]» یا «ردیابی کامل[8]» معروف است. بااین حال، ازآنجاکه شاخص‌ها به‌طور مستمر تعدیل می‌شوند و گاه از تعداد زیادی سهم تشکیل شده‌اند، ردیابی کامل می‌تواند هزینه‌های معاملاتی قابل‌توجهی ایجاد کند و حتی در عمل دشوار یا غیرممکن باشد. بنابراین، رویکرد رایج‌تر، بازسازی بهینه[9] است؛ یعنی انتخاب زیرمجموعه‌ای از سهام شاخص و تعیین وزن‌های آن‌ها به‌گونه‌ای که اختلاف عملکرد پرتفوی و شاخص حداقل شود. میزان این اختلاف با معیارهایی مانند خطای

1. rational investors
2. diversification
3. active management
4. passive management
5. index tracking
6. efficient-market hypothesis
7. full replication
8. full tracking
9. optimized replication

ردیابی[1] سنجیده می‌شود و هرچه خطای ردیابی کمتر باشد، عملکرد پرتفوی به شاخص نزدیک‌تر و از منظر ردیابی مطلوب‌تر است. بر همین اساس، مدل‌های بهینه‌سازی ریاضی در سال‌های اخیر برای کمینه‌سازی خطای ردیابی مورد انتظار و مدیریت محدودیت‌های عملیاتی به کار گرفته شده‌اند.

در کنار ردیابی شاخص، رویکردی که مزایای مدیریت فعال و غیرفعال را توأمان در خود دارد و به‌عنوان پایه‌ای برای رویکردهای نوین سرمایه‌گذاری شناخته می‌شود، ردیابی بهبودیافته شاخص[2] است. این رویکرد را می‌توان تعمیمی از ردیابی شاخص دانست که ضمن تقلید رفتار شاخص با تشکیل پرتفویی از سهام تشکیل‌دهنده آن، به دنبال کسب بازده‌ای فراتر از بازده شاخص نیز هست. به بیان دیگر، هدف ردیابی بهبودیافته شاخص، یافتن تعادل میان «هم‌سویی با شاخص» و «کسب بازده مازاد» است؛ تعادلی که در قالب یک مسئله‌ی دوگانه قابل تبیین است: حداکثرسازی بازده از یک‌سو و حداقل‌سازی ریسک انحراف از شاخص از سوی دیگر. در عمل نیز مدیران صندوق‌ها برای دستیابی به بازده مازاد ممکن است از ابزارها و استراتژی‌هایی نظیر انتخاب سنتی اوراق بهادار، افزایش آلفای جنسن از طریق پذیرش ریسک بیشتر یا استفاده از قراردادهای مشتقه مانند قراردادهای آتی شاخص بهره گیرند؛ اما هر یک از این روش‌ها ریسک‌های خاص خود از جمله ریسک نقدشوندگی، ریسک طرف مقابل، ریسک اعتباری و حساسیت به تغییرات نرخ بهره را به همراه دارد و می‌تواند زیان‌های شدید ایجاد کند.

نکته‌ی کلیدی آن است که بسیاری از مدل‌های متعارف مدیریت پرتفوی، به‌ویژه در ادبیات کلاسیک، بر معیارهای مبتنی بر واریانس یا فروض نرمال‌بودن بازده‌ها تکیه دارند؛ درحالی‌که بازده‌های واقعی بازار، به‌خصوص در بازارهای نوظهور، می‌توانند نامتقارن و دارای دم‌های سنگین[3] باشند. در چنین شرایطی، تمرکز بر واریانس یا معیارهای مشابه ممکن است ریسک‌های نامطلوب را به‌درستی منعکس نکند. یکی از معیارهای رایج برای سنجش ریسک، ارزش در معرض ریسک[4] (VaR) است که حداکثر زیان محتمل در سطح اطمینان مشخص را برآورد می‌کند، اما این معیار محدودیت‌هایی از جمله عدم برخورداری از ویژگی زیرجمعی[5] در برخی توزیع‌ها و دشواری‌های بهینه‌سازی دارد. به‌منظور رفع این کاستی‌ها، ارزش در معرض ریسک شرطی[6] $(CVaR)$ به‌عنوان یک معیار ریسک منسجم[7] معرفی شد که میانگین زیان‌های ناحیه دنباله را اندازه‌گیری می‌کند و افزون بر انسجام، از خاصیت تحدب برخوردار است؛ به همین دلیل، در بسیاری از مسائل بهینه‌سازی، چارچوبی مناسب‌تر برای کنترل زیان‌های شدید فراهم می‌آورد و در قالب برنامه‌ریزی خطی نیز قابل پیاده‌سازی است (Artzner et al., 1999; Rockafellar & Uryasev, 2000, 2002).

از سوی دیگر، برای سنجش کارایی پرتفوی در شرایط توزیع‌های نامتقارن، معیارهایی که کل توزیع بازده را در نظر می‌گیرند اهمیت می‌یابند. نسبت امگا[8] از جمله معیارهای مبتنی بر توزیع است که با مقایسه‌ی احتمال نتایج مطلوب در برابر نتایج نامطلوب نسبت به یک سطح آستانه، تصویری غنی‌تر از کارایی سرمایه‌گذاری ارائه می‌دهد. ترکیب این معیار با یک سازوکار کنترل ریسک دنباله‌ای مانند $CVaR$ می‌تواند چارچوبی ایجاد کند که هم به «کیفیت بازده» توجه کند و هم «زیان‌های شدید» را محدود سازد. این ترکیب به‌ویژه برای ردیابی بهبودیافته شاخص جذاب است؛ زیرا از یک‌سو نیاز است پرتفوی تا حدی هم‌سو با شاخص بماند و از سوی دیگر، برای

1. tracking error
2. enhanced index tracking
3. fat-tailed
4. Value-at-Risk
5. sub-additivity
6. Conditional Value-at-Risk
7. coherent risk measure
8. Omega ratio

دستیابی به بازده مازاد، ناگزیر در معرض ریسک‌های بیشتری قرار می‌گیرد و در صورت فقدان کنترل مناسب، زیان‌های حدی می‌تواند کل دستاورد بازده مازاد را از بین ببرد.

در سال‌های اخیر، رشد شاخص‌های بازار سهام در افق بلندمدت نیز ایده سرمایه‌گذاری مبتنی بر شاخص را تقویت کرده است. مشاهده روند شاخص کل بورس تهران طی سال‌های گذشته نشان می‌دهد که می‌توان با طراحی پرتفوی مناسب، حتی با وجود افت بازده برخی شرکت‌ها، از روند افزایشی شاخص بهره‌مند شد. به همین دلیل، توسعه مدل‌هایی که بتوانند هم‌زمان «پیروی از شاخص» و «خلق بازده مازاد با کنترل ریسک‌های نامطلوب» را هدف قرار دهند، برای بازار سرمایه اهمیت کاربردی و پژوهشی دارد.

بر این اساس، پژوهش حاضر با تمرکز بر ردیابی بهبودیافته شاخص، یک چارچوب بهینه‌سازی مبتنی بر مدل $Omega - CVaR$ ارائه می‌کند که در آن نسبت امگا به‌عنوان معیار کارایی و $CVaR$ به‌عنوان معیار کنترل ریسک نامطلوب در قالب قید در نظر گرفته می‌شود. انتظار می‌رود چنین چارچوبی بتواند ضمن حفظ هم‌سویی قابل‌قبول با شاخص مرجع، در مواجهه با ریسک‌های دنباله‌ای و زیان‌های شدید مقاوم‌تر بوده و از طریق مدیریت بهتر افت‌ها، در افق بلندمدت به بهبود عملکرد تجمعی کمک کند.

۲. مبانی نظری و پیشینه پژوهش

مبانی نظری. معروف‌ترین مدل بهینه‌سازی پرتفوی، مدل کلاسیک میانگین–واریانس مارکوویتز[1] (۱۹۵۲) است که در آن واریانس بازده پرتفوی به‌منظور تنوع‌بخشی و کنترل ریسک، حداقل می‌شود. پس از معرفی این مدل، مسئله تخصیص دارایی به‌طور گسترده در ادبیات مالی مورد مطالعه قرار گرفته است. براین‌اساس، معیارهای ریسک متعددی در ادبیات پیشنهاد شده است (شارپ[2] (۱۹۷۱)، ایتزاکی[3] (۱۹۸۲)، کُنو و یامازاکی[4] (۱۹۹۱)، راکفلر و اوریاسف[5] (۲۰۰۰)) که بسیاری از آن‌ها از لحاظ محاسباتی، زمانی که متغیرهای تصادفی گسسته در نظر گرفته می‌شوند، جذاب هستند. مانسینی[6] (۲۰۰۳) و مانسینی و همکاران (۲۰۰۳) بررسی سیستماتیکی در خصوص مدل‌هایی که بر اساس آن معیارهای ریسک پرتفوی می‌بایست کمینه و معیارهای مرتبط با بازده می‌بایست بیشینه شود را طبقه‌بندی نمودند. در واقع این برنامه‌ریزی‌ها به برنامه‌ریزی دوهدفه[7] شناخته می‌شوند که بر اساس آن میانگین بازده نشان‌دهنده پیامد مورد انتظار و ریسک به‌عنوان تغییرپذیری پیامدها در نظر گرفته می‌شود. به‌جای حل برنامه‌های دوهدفه، می‌توان بازده و ریسک را در قالب یک نسبت ترکیب کرد که این معیارها به نسبت‌های عملکرد[8] یا پاداش به ریسک[9] شناخته می‌شوند. نسبت شارپ که توسط شارپ (۱۹۶۶) معرفی شده است، یکی از مهم‌ترین نسبت‌های پاداش به ریسک است که واریانس بازده پرتفوی را با میانگین بازده مازاد آن در نظر می‌گیرد. بااین‌حال، استفاده از واریانس مستلزم فرض نرمال بودن توزیع پرتفوی است و بنابراین نسبت شارپ تنها بر دو گشتاور مرتبه اول متکی است. بااین‌وجود، معیارهای ریسک و پاداش به ریسک متعددی در طول سال‌های بعد برای رفع معایب واریانس ایجاد شده است. نسبت امگا یک معیار عملکردی است که توسط کیتینگ و شادویک[10]

1. Markowitz
2. Sharpe
3. Yitzhaki
4. Konno & Yamazaki
5. Rockafellar & Uryasev
6. Mansini
7. bi-objective program
8. performance ratio
9. reward-risk ratio
10. Keating & Shadwick

(۲۰۰۲) معرفی شده است که گشتاور مرتبه بالاتر توزیع بازده را در بر می‌گیرد و انحراف بالا و پایین بازده پرتفوی را از یک نقطه آستانه ثابت که توسط سرمایه‌گذار تعیین می‌شود، نشان می‌دهد.

در این پژوهش، تمرکز بر نسبت امگا به دلیل مزایای عملی و محاسباتی آن است. از دیدگاه عملی، ازآنجاکه تنها انحراف پایین از آستانه به‌عنوان ریسک در نظر گرفته می‌شود، نسبت امگا زمانی که توزیع بازده نامتقارن است، معیار مناسبی محسوب می‌شود. همچنین از نظر محاسباتی، در مقایسه با سایر معیارهای ارزیابی عملکرد تعدیل‌شده با ریسک[1] شناخته‌شده، مانند نسبت راچف[2] (بیگلووا[3] و همکاران (۲۰۰۴)) که نسبت دنباله بالا به پایین توزیع بازده را در نظر می‌گیرد، نسبت امگا یک مدل بهینه‌سازی ارائه می‌دهد که از نظر محاسباتی برای تعداد زیادی از سناریوها قابل اجرا[4] است.

مقدار نقطه آستانه[5] در نسبت امگا، تأثیر به‌سزایی بر مقدار مورد انتظار آن دارد. ازاین‌رو، انتخاب بهینه آن، هم از منظر نظری و هم از منظر عملی، حائز اهمیت است. از دیدگاه نظری، انتخاب نقطه آستانه، نمایانگر میزان ریسک‌پذیری یا ریسک‌گریزی سرمایه‌گذار است؛ به‌گونه‌ای‌که مقادیر بالاتر (پایین‌تر) آن، نشان‌دهنده تمایل بیشتر به ریسک‌پذیری (ریسک‌گریزی) است. رایج‌ترین انتخاب برای نقطه آستانه، بازده بدون ریسک یا بازده شاخص بازار است.

شارما[6] و همکاران (۲۰۱۷) پیشنهاد کردند که ارزش در معرض ریسک شرطی ($CVaR$) یک پرتفوی معیار در سطح اطمینان مشخص، که نشان‌دهنده ریسک‌گریزی سرمایه‌گذاران است، به‌عنوان نقطه آستانه در نظر گرفته شود. آن‌ها در ادامه مطالعه خود، با بررسی استواری مدل از طریق بیشینه‌سازی نسبت امگا با در نظر گرفتن بدترین مقادیر $CVaR$ به‌عنوان نقطه آستانه، به توسعه آن پرداختند. بااین‌حال، زمانی که توزیع داده‌ها دارای داده‌های پرت[7] زیادی است، $CVaR$ ریسک زیان را بیش از حد تخمین می‌زند. معیار جایگزین برای $CVaR$، ارزش در معرض ریسک (VaR) است که منعکس‌کننده تمایل سرمایه‌گذار به زیان‌های سنگین برای مقادیر متغیر سطح اطمینان است. سهگال[8] و همکاران (۲۰۲۳) نسبت امگا را زمانی که نقطه آستانه را بدترین مقدار VaR قرار دادند، بهینه کردند. علاوه‌بر این، با معرفی استواری در نقطه آستانه، آن‌ها بر عملکرد استوار نسبت امگا به دلیل توزیع احتمال نامشخص مرتبط با بازده تاکید کردند و در نهایت تحلیل بدترین حالت[9] مشابه پژوهش شارما و همکاران (۲۰۱۷) را در نظر گرفتند.

پیشینه پژوهش. مسئله ردیابی شاخص و ایجاد پرتفوی ردیاب شاخص در سال‌های اخیر به یکی از موضوعات کلیدی در مدیریت سرمایه‌گذاری تبدیل شده است. این مفهوم به‌طور گسترده در بازارهای مالی جهانی، مؤسسات مالی و شرکت‌های سرمایه‌گذاری مورد استفاده قرار می‌گیرد و به همین دلیل، توجه بسیاری از تحلیلگران مالی و پژوهشگران حوزه سرمایه‌گذاری را به خود جلب کرده است.

1. risk-adjusted performance measures
2. Rachev
3. Biglova
4. tractable
5. threshold point
6. Sharma
7. outliers
8. Sehgal
9. worst-case analysis

مطالعه انجام‌شده توسط برینسون[1]، هود[2] و بی‌بوئر[3] (۱۹۹۵) نشان داده است که سیاست سرمایه‌گذاری یا به‌عبارت‌دیگر تخصیص دارایی‌ها، در مقایسه با استراتژی‌های سرمایه‌گذاری مانند زمان‌بندی بازار و انتخاب سهام، تأثیر بسیار بیشتری بر عملکرد پرتفوی دارد. یافته‌های این پژوهش نشان می‌دهد که سیاست‌های سرمایه‌گذاری تبیین‌کننده ۹۳/۶ درصد از نوسانات بازده پرتفوی در طول زمان است. به‌عبارت‌دیگر سرمایه‌گذاران به‌جای صرف زمان زیاد برای حدس زدن جهت‌گیری بازار یا تحلیل جزئیات مربوط به انتخاب سهام، باید تمرکز اصلی خود را بر تدوین یک استراتژی تخصیص دارایی بهینه اختصاص دهند (Brinson et al., 1995).

چارلز اِلیس[4] در مقاله‌ای تحت عنوان «بازی بازنده‌ها[5]» نشان داد که ۸۵ درصد مدیران فعال نتوانسته‌اند بازده بالاتر از شاخص اس‌اندپی ۵۰۰ را در یک بازه زمانی ۱۰ ساله به‌دست آورده و بر آن غلبه نمایند. اِلیس بیان داشت که سرمایه‌گذاری در بازار سهام یک بازی با برآیند صفر[6] است، زیرا تمام سرمایه‌گذاران درمجموع، بازده بازار را به‌دست خواهند آورد. معادل یک بازنده در بازار، بایستی یک برنده وجود داشته باشد، تمام سرمایه‌گذاران نمی‌توانند عملکردی فراتر از بازار داشته باشند زیرا که آن‌ها خود بازار هستند. به‌جای تلاش در جهت غلبه بر بازار، سرمایه‌گذاران بایستی بازتابی از بازار را با حداقل هزینه از طریق یک پرتفوی ردیابی‌کننده شاخص به‌دست آورند. نکته قابل‌توجه آن است که سرمایه‌گذاران به‌طور میانگین، بازده بازار منهای هزینه‌های معاملاتی را دریافت خواهند کرد و هر چه فعال‌تر باشند، با هزینه‌های معاملاتی، تأثیرات بازار و هزینه‌های مالیاتی بیشتر مواجه خواهند بود (Schoenfeld, 2004).

ترینر و بلک[7] (۱۹۷۳) پرتفویی را پرتفوی فعال می‌نامند که اجازه تصحیح‌های مکرر جهت ثبت اطلاعات جدید را می‌دهد. وزن دارایی‌ها در یک پرتفوی فعال با توجه به نمایه ریسک–بازده، دچار تغییر می‌شود. اما، این وضعیت برای پرتفوی غیرفعال به این شکل نیست و در این نوع پرتفوی، وزن دارایی‌ها بسته به حرکت شاخص بازار که این دارایی‌ها بخشی از آن را تشکیل می‌دهند، تغییر می‌کند و نه نمایه ریسک–بازده دارایی (Treynor & Black, 1973).

جهت تشکیل پرتفوی ردیاب شاخص، پژوهش‌گران معیاری تحت عنوان «خطای ردیابی» را معرفی کرده‌اند. این معیار به‌طور گسترده در مدیریت پرتفوی‌های غیرفعال به‌کار می‌رود و بیانگر میزان انحراف عملکرد پرتفوی از شاخص مبنا است. برخی محققان از قدر مطلق اختلاف بین بازده شاخص و بازده پرتفوی استفاده کرده‌اند و برخی دیگر از واریانس اختلاف بین بازده شاخص و بازده پرتفوی بهره برده‌اند (Jansen & van Dijk, 2002). همچنین، پژوهشگران دیگری به معرفی مجموع مجذور اختلاف بازده شاخص و پرتفوی به‌عنوان خطای ردیابی شاخص و پرتفوی پرداختند (Beasley et al., 2003).

راد[8] (۱۹۸۰) یک مسئله بهینه‌سازی درجه‌دو پیشنهاد داد و در آن واریانس پسماند پرتفوی ردیاب نسبت به شاخص را کمینه کرد درحالی‌که در محدودیت مسئله بتا پرتفوی برابر یک در نظر گرفته شد. او همچنین مدل خود را با در نظر گرفتن هزینه‌های معاملاتی بسط داد (Rudd, 1980).

1. Brinson
2. Hood
3. Beebower
4. Charles Ellis
5. the loser’s game
6. zero-sum game
7. Treynor & Black
8. Rudd

میلد و سالکین[۱] (۱۹۸۹) چهار مدل متفاوت را برای کمینه کردن انحراف جذر میانگین مربعات[۲] بین پرتفوی ردیاب و شاخص معرفی کردند و نتایج را در بازار سهام ژاپن بررسی و مزایای هریک را ارزیابی کردند (Meade & Salkin, 1989).

در برخی مطالعات دیگر، پژوهش‌گران از واریانس اختلاف بازده پرتفوی ردیاب و بازده شاخص، که به‌عنوان نوسانات مرکزی[۳] نیز شناخته می‌شود، برای ردیابی شاخص استفاده کردند (Buckley & Korn, 1998; Roll, 1992). در طی سال‌های بعد، محققانی از این رویکرد به علت آنچه نادیده گرفتن احتمال یک اختلاف ثابت بین بازده پرتفوی ردیاب و بازده شاخص خوانده شده بود، انتقادهایی کردند (Beasley et al., 2003; Dose & Cincotti, 2005).

دُز و سینکوتی (۲۰۰۵) پیشنهاد کردند به‌جای کمینه کردن نوسان مرکزی، از کمینه کردن انحراف جذر میانگین مربعات، که به‌عنوان نوسانات غیر مرکزی[۴] نیز شناخته می‌شود، برای ردیابی شاخص استفاده شود. آن‌ها این روش را پس از خوشه‌بندی سهام مدنظر ارائه کرده‌اند. بیزلی[۵] و همکاران (۲۰۰۳) از نُرم ℓ_p برای اندازه‌گیری خطای ردیابی استفاده کردند. در این مطالعات، رویکرد مجموع وزنی منجر به یک مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی عدد صحیح مختلط[۶] برای کمینه کردن خطای ردیابی و میانگین بازده مازاد شد (Beasley et al., 2003; Dose & Cincotti, 2005).

مدل دیگر ردیابی شاخص یک مسئله برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح مختلط دو هدفه[۷] است که در آن فاصله آلفا پرتفوی تا صفر و همچنین بتا پرتفوی تا یک را با در نظر گرفتن هزینه‌های معاملاتی و تعداد دارایی‌ها کمینه می‌کند (Canakgoz & Beasley, 2009). همچنین در برخی پژوهش‌ها، از مفهوم هم‌انباشتگی[۸] برای دستیابی به یک رابطه بلندمدت بین بازده دارایی‌ها و بازده شاخص برای تجزیه‌وتحلیل مدل ردیابی شاخص استفاده شده است (Alexander & Dimitriu, 2005; Sant'Anna et al., 2017).

پژوهش‌های اخیر نشان می‌دهد که صندوق‌های شاخصی بهبودیافته موردتوجه بیشتری قرارگرفته‌اند. مطالعات احمد و ناندا[۹] (۲۰۰۵) نشان از رشد صندوق‌های شاخصی بهبودیافته در طول بیست سال اخیر نسبت به صندوق‌های شاخصی اس‌اندپی ۵۰۰ می‌دهد (Ahmed & Nanda, 2005). کوشیزوکا[۱۰] و همکاران (۲۰۰۹) و همچنین ونگ و وانگ[۱۱] (۲۰۱۷) به‌طور جداگانه گزارشی از محبوبیت فزاینده صندوق‌های سرمایه‌گذاری مبتنی بر ردیابی بهبودیافته شاخص به ترتیب در بازارهای توکیو و چین داده‌اند (Koshizuka et al., 2009; Weng & Wang, 2017). به‌علاوه یافته‌های ونگ و وانگ (۲۰۱۷) نشان می‌دهد که صندوق‌های سرمایه‌گذاری با مدیریت غیرفعال در بازار چین نسبت به صندوق‌های سرمایه‌گذاری با مدیریت فعال، مزایای بیشتری دارند (Weng & Wang, 2017).

1. Meade & Salkin
2. Root Mean Square Deviation (RMSD)
3. central volatility
4. un-central volatility
5. Beasley
6. Mixed Integer Non-linear Programming (MINP)
7. Bi-Objective Mixed-Integer Linear Programming
8. cointegration
9. Ahmed & Nanda
10. Koshizuka
11. Weng & Wang

وو[1] و همکاران (۲۰۰۷) از یک رویکرد برنامه‌ریزی هدف[2] برای ردیابی بهبودیافته شاخص استفاده کردند. آن‌ها با تعیین هدف مطلوب بیشینه‌سازی مازاد بازده پرتفوی نسبت به بازده شاخص و همچنین کمینه‌سازی خطای ردیابی به این مهم دست پیدا کردند (Wu et al., 2007). کوشیزوکا و همکاران (۲۰۰۹) یک مدل بهینه‌سازی مبتنی بر معیار میانگین قدرمطلق انحرافات[3] و نیم میانگین قدرمطلق انحرافات[4] پیشنهاد کردند که علاوه‌بر بالا بودن بازده نسبت به بازده شاخص دارای همبستگی بالایی نیز با حرکت شاخص بود (Koshizuka et al., 2009). چاناک‌گوز و بیزلی[5] (۲۰۰۹) یک مدل بهینه‌سازی خطی مختلط دو هدفه برای ردیابی بهبودیافته شاخص پیشنهاد کردند که همزمان آلفای پرتفوی بیشینه و بتای پرتفوی در حدود مقدار واحد کمینه می‌شد (Canakgoz & Beasley, 2009). لی[6] و همکاران (۲۰۱۱) یک مسئله برنامه‌ریزی دوهدفه پیشنهاد کردند که هدف بیشینه‌سازی میانگین بازده مازاد پرتفوی و کمینه‌سازی انحرافات نامطلوب از بازده شاخص با محدودیت‌های هزینه‌های معاملاتی بود. یک الگوریتم بهینه‌سازی چندهدفه مبنا برای پیدا کردن راه‌حل مسئله به‌کار گرفته شد (Li et al., 2011). لژون[7] (۲۰۱۲) پیشنهاد کرد تا میانگین بازده مازاد پرتفوی تحت قید ریسک بازار[8] که به‌وسیله معیار نیم انحراف معیار کمی شده است، بیشینه شود. وی چارچوب نظریه بازی‌ها را زمانی که توزیع بازده‌های پرتفوی از توزیع بیضوی[9] پیروی می‌کرد، مطرح نمود (Lejeune, 2012). گوستاروبا و اسپرانزا[10] (۲۰۱۲) یک مسئله برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح مختلط برای ردیابی شاخص پیشنهاد کردند که در آن قدرمطلق انحرافات بازده پرتفوی و بازده شاخص برای ردیابی شاخص کمینه می‌شد، درحالی‌که محدودیت‌هایی روی هزینه‌های معاملات و تعداد دارایی‌های پرتفوی وضع کرده بودند. آن‌ها همچنین این مدل را برای ردیابی بهبودیافته شاخص نیز بسط دادند (Guastaroba & Speranza, 2012). فیلیپی[11] و همکاران (۲۰۱۶) یک رویکرد ابتکاری[12] بکار بردند که ترکیبی از ابزار جست‌وجوی کرنل[13] و روش ϵ–محدودیت برای حل مسئله برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح دوهدفه است که در آن میانگین بازده مازاد بیشینه و قدرمطلق انحرافات بازده پرتفوی و بازده شاخص کمینه می‌شود (Filippi et al., 2016).

برونی[14] و همکاران (۲۰۱۵) یک مسئله برنامه‌ریزی خطی برای ردیابی بهبودیافته شاخص پیشنهاد کردند که در آن میانگین بازده مازاد بیشینه بود. همچنین آن‌ها یک قید برای بدترین عملکرد بازده پرتفوی از بازده شاخص قرار دادند (Bruni et al., 2015). پائولو[15] و همکاران (۲۰۱۶) یک مدل بهینه‌سازی پیشنهاد دادند که موازنه‌ای میان مجموع وزنی میانگین بازده مازاد و واریانس اختلاف بازده پرتفوی و بازده شاخص برقرار می‌کند. آن‌ها فروش استقراضی را نیز مجاز در نظر گرفتند (de Paulo et al., 2016). گوستاروبا و همکاران (۲۰۱۶) یک مسئله برنامه‌ریزی خطی پیشنهاد دادند که نسبت اُمگا را برای ردیابی بهبودیافته شاخص برای اهداف متغیر و ثابت بهینه می‌کرد. آن‌ها همچنین مدل خود را برای درنظرگرفتن شرایط واقعی مانند هزینه‌های معاملاتی و تعداد دارایی‌های پرتفوی تعمیم دادند (Guastaroba et al., 2016). گوستاروبا و همکاران (۲۰۲۰) نسبت اُمگا را با

1. Wu
2. goal programming
3. Mean Absolute Deviation (MAD)
4. semi MAD
5. Canakgoz & Beasley
6. Li
7. Lejeune
8. market risk
9. ellipsoidal distribution
10. Guastaroba & Speranza
11. Filippi
12. heuristic
13. kernel search
14. Bruni
15. Paulo

لحاظ چارچوب ریسک–پاداش به‌منظور پیشنهاد یک مدل بهینه‌سازی جدید جهت ردیابی بهبودیافته شاخص بهینه سازی کردند که از معیار ارزش در معرض ریسک شرطی موزون استفاده می‌کرد (Guastaroba et al., 2020).

در ایران برای اولین بار حنیفی و همکاران (۱۳۸۸) مسئله ردیابی شاخص را مطرح نمودند. آن‌ها با استفاده از الگوریتم ژنتیک در سه رویکرد الگوریتم ژنتیک کلاسیک، بهبودیافته و چندمرحله‌ای و با درنظرگرفتن محدودیت تعداد سهام مجاز در پرتفوی در چهار حالت ۵، ۱۰، ۱۵ و ۲۰ سهمی به حل مسئله سبد ردیاب شاخص پرداختند. نتایج آن‌ها نشان داد که الگوریتم ژنتیک چندمرحله‌ای در بین سایر رویکردها کمترین خطا را داشته است.

ورسه‌ای و شمس (۱۳۸۹) یک روش حل ابتکاری به‌منظور تشکیل پرتفوی ردیاب شاخص ارائه دادند. محدودیت‌های مورداستفاده آن‌ها در مدل شامل محدودیت عدد صحیح تعداد سهام مجاز در پرتفوی و نیز محدودیت سقف و کف سرمایه‌گذاری بود. آن‌ها مسئله را به دو زیرمسئله انتخاب سهام و تخصیص اوزان بهینه تقسیم کردند. اساس روش حل آن‌ها بر کاهش دامنه‌ی جستجو با استفاده از مفهوم همبستگی استوار بود. آن‌ها ۳۰ سهم از سهام کل بازار بورس تهران را انتخاب و به روش قطعی حل کردند.

نبی‌زاده و همکاران (۱۳۹۶)، با بهره‌گیری از دو الگوریتم تکاملی ژنتیک و الگوریتم تکامل دیفرانسیلی به بررسی عملکرد سه مدل ارائه‌شده در پژوهش خود پرداختند. پس از ارزیابی نتایج دریافتند مدلی که بر مبنای بتای نامطلوب ارائه و توسط الگوریتم تکاملی دیفرانسیلی حل شده است، کارایی بیشتری دارد. آن‌ها با در نظر گرفتن حداقل تعداد سهام در سبد، بدون لحاظ هزینه‌های معاملاتی، مسئله را حل کردند.

عیوض‌لو و همکاران (۱۳۹۶) نیز با بررسی شاخص کل بورس، کاربرد هم انباشتگی و همبستگی را در تشکیل پرتفوی سهام مبتنی بر شاخص ارزیابی کردند و نشان دادند با توجه به خطای ردیابی، رویکرد هم انباشتگی، عملکرد بهتری نسبت به رویکرد همبستگی دارد. از سوی دیگر، بر مبنای بازده پرتفوی‌ها و معیارهای نسبت اطلاعاتی و شارپ، عملکرد مدل در ردیابی شاخص، بهتر از ردیابی شاخص بهبودیافته است.

انصاری و همکاران (۱۳۹۸) با استفاده از یک مدل دو مرحله‌ای بر اساس برنامه‌ریزی ترکیبی عدد صحیح به کمینه‌سازی خطای ردیابی و بیشینه‌سازی بازده تحت مقادیر تلورانس مجاز برای خطای ردیابی پرداختند. آن‌ها برای نشان دادن کارایی مدل پیشنهادی از شاخص ۵۰ شرکت فعال بورس اوراق بهادار استفاده کردند. همچنین از الگوریتم جست‌وجوی مستقیم و ژنتیک برای حل مسئله استفاده کردند. یافته‌های پژوهش نشان می‌دهد مدل دومرحله‌ای پیشنهادی بهتر از مدل یک‌مرحله‌ای است.

عیوض‌لو و همکاران (۱۴۰۰) با استفاده از مدل ارزش در معرض ریسک شرطی ترکیبی دو دنباله‌ای[1] به تشکیل پرتفوی بهینه ردیاب شاخص پرداخته و عملکرد آن را بررسی کردند. یافته‌های پژوهش نشان داد که پرتفوی‌های حاصل‌شده از این روش در بازسازی عملکرد شاخص موفق عمل کرده است.

رحمانی و دهقانی اشکذری (۲۰۲۱) یک روش دو مرحله‌ای برای ردیابی بهبودیافته شاخص کل بورس پیشنهاد کردند. در مرحله نخست یک مدل زنجیره مارکوف گسسته به‌منظور پایش سهام طراحی نمودند که سهم‌هایی با بالاترین احتمال کسب بازده مازاد بر بازده شاخص انتخاب گردند. سپس در مرحله دوم با تخصیص وزن به هریک از سهم‌های پایش‌شده به‌وسیله بیشینه‌سازی نسبت استار[2] به تشکیل پرتفوی بهینه پرداخته و عملکرد آن را بررسی نمودند (Rahmani & Dehghani Ashkezari, 2021).

1. Two-tail Mixed Conditional Value at Risk (TMCVaR)
2. Stable Tail-Adjusted Return Ratio (STARR)

۳. روش‌شناسی پژوهش

علائم قراردادی. مجموعه $N = \{1, \dots, n\}$، مجموعه همه دارایی‌های قابل سرمایه‌گذاری در نظر گرفته می‌شود. بردار اوزان $x = (x_1, \dots, x_n)$ نشان‌دهنده وزن اختصاص داده‌شده به هر دارایی است، به‌طوری‌که x_i وزن دارایی iام را برای هر $i = 1, \dots, n$ نشان می‌دهد. هدف، ایجاد یک پرتفوی سرمایه‌گذاری بهینه است؛ بنابراین، بردار اوزان x باید در مجموعه محدودیت‌های تعریف‌شده، یعنی مجموعه امکان‌پذیر X، قرار داشته باشد. ساده‌ترین تعریف برای مجموعه امکان‌پذیر X به‌صورت زیر است؛

$$X = \left\{ x = (x_1, \dots, x_n) : \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \, , x_i \geq 0, i = 1, \dots, n \right\}$$ رابطه (۱)

که در رابطه ۱، محدودیت $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ نشان می‌دهد که مجموع وزن‌های تخصیص داده‌شده به دارایی‌ها باید برابر با یک باشد. همچنین، محدودیت $x_i \geq 0$ بیان می‌کند که فروش استقراضی مجاز نیست و وزن هیچ دارایی نمی‌تواند منفی باشد.

علاوه‌بر موارد فوق، فرض می‌شود افق سرمایه‌گذاری Γ باشد؛ مرسوم است که Γ به تعداد مساوی نقاط زمانی تقسیم شود که به آن T گفته می‌شود. بنابراین T سناریو با احتمال وقوع p_t برای سناریوی tام به ازای هر $t = 1, \dots, T$ در نظر گرفته می‌شود. بازده و زیان پرتفوی x، که به‌وسیله R_x و L_x نشان داده می‌شود، به‌ترتیب توزیع متناهی $\{R_{x1}, \dots, R_{xT}\}$ و $\{L_{x1}, \dots, L_{xT}\}$ با بردار احتمال متناظر $\{p_1, \dots, p_T\}$ است. r_{it} و l_{it} به ترتیب به‌عنوان بازده و زیان دارایی iام به ازای هر $i = 1, \dots, n$ تحت سناریوی tام با احتمال p_t به ازای هر $t = 1, \dots, T$ با میانگین $r_i = \sum_{t=1}^{T} r_{it} p_t$ و $l_i = \sum_{t=1}^{T} l_{it} p_t$ در نظر گرفته می‌شود. در این صورت، امید ریاضی بازده و زیان پرتفوی x به‌صورت زیر تعریف می‌شود؛

$$E(R_x) = \sum\nolimits_{t=1}^{T} \left(\sum\nolimits_{i=1}^{n} r_{it} x_i \right) p_t$$ رابطه (۲)

$$E(L_x) = \sum\nolimits_{t=1}^{T} \left(\sum\nolimits_{i=1}^{n} l_{it} x_i \right) p_t$$ رابطه (۳)

همچنین از رویکرد گذشته‌نگر[1] بهره گرفته می‌شود؛ بدین معنی که ترکیب پرتفوی بهینه برای نگهداری در آینده، بر اساس داده‌های تاریخی مشاهده‌شده در دوره زمانی قبل آن تعیین می‌گردد. در این رویکرد، T دوره تاریخی به‌عنوان سناریوهایی با احتمال وقوع برابر در نظر گرفته می‌شوند؛ یعنی به ازای هر $t = 1, \dots, T$، $p_t = 1/T$ است. شایان ذکر است که مدل‌های بهینه‌سازی ارائه‌شده، برای هر مجموعه دلخواهی از سناریوها یا هر تابع توزیع احتمالاتی نیز معتبر باقی می‌مانند.

همان‌طور که پیش‌تر اشاره شد، هدف ردیابی بهبودیافته شاخص کسب بازده بالاتر از شاخص بازار با پذیرش حداقل ریسک مازاد بر ریسک بازار است. در این راستا، متغیر تصادفی R^I نمایانگر نرخ بازده شاخص بازار است. مقدار تحقق‌یافته این متغیر تحت سناریوی t، با نماد r_t^I و برای $t = 1, \dots, T$ نشان داده می‌شود. همچنین، میانگین نرخ بازده شاخص بازار به‌صورت زیر تعریف می‌شود؛

$$\mu^I = \sum\nolimits_{t=1}^{T} r_t^I p_t$$ رابطه (۴)

در ادامه، برای نمایش اجزای مثبت و منفی مقادیر عددی، از نمادهای $(\cdot)_+$ و $(\cdot)_-$ به فرم زیر استفاده می‌شود؛

$$(Q)_+ = \max\{Q, 0\}$$ رابطه (۵)

$$(Q)_- = \max\{-Q, 0\}$$ رابطه (۶)

1. look-back approach

مدل‌های مبتنی بر نسبت امگا. یکی از فرموله‌سازی‌های ممکن برای مسئله ردیابی بهبودیافته شاخص مبتنی بر بیشینه‌سازی یک معیار عملکرد است که به‌صورت نسبت بیان می‌شود. در این چارچوب، طبیعی است که این معیارهای عملکرد نسبت به یک شاخص بازار به‌عنوان هدف ازپیش‌تعیین‌شده بیان شوند. در همین راستا، میِد و بیزلی[1] (۲۰۱۱) یک مدل بهینه‌سازی غیرخطی ارائه می‌دهند که هدف آن بیشینه‌سازی نسخه اصلاح‌شده‌ای از نسبت سورتینو[2] است.

$$\frac{E\{R_x-\mu^I\}}{\sqrt{E\{(R_x-\mu^I)_-^2\}}}=\frac{E(R_x)-\mu^I}{\sqrt{\sum_{t=1}^{T}(\max\{\mu^I-r_t,0\})^2p_t}} \quad \text{رابطه (۷)}$$

که در رابطه ۷، $r_t=\sum_{i=1}^{n}r_{it}x_i$ برای هر $t=1,\dots,T$ است (Meade & Beasley, 2011).

در مقایسه با نسبت سورتینو استانداردی که سورتینو و پرایس[3] (۱۹۹۴) معرفی کردند، حداقل بازده مورد نیاز با میانگین بازده شاخص بازار، μ^I، جایگزین شده است. ایده‌ی بنیادی این مدل بهینه‌سازی بر پایه‌ی برقراری توازن میان دو هدف اصلی پیشی‌گرفتن از میانگین بازده شاخص بازار که در صورت کسر نسبت قرار دارد و حداقل‌سازی یک معیار ریسک نزولی که در مخرج نسبت قرار دارد، است. در این مدل، معیار ریسک نزولی به‌صورت نیم انحراف معیار[4] از نرخ بازده پرتفوی نسبت به میانگین نرخ بازده شاخص بازار تعریف می‌شود.

از طرفی، ممکن است سرمایه‌گذاری علاقه‌مند باشد تا پرتفویی را تشکیل دهد که به آن پرتفوی شاخصی به‌علاوه آلفا[5] گفته می‌شود و هدف آن کسب بازده بالاتر از نرخ بازده شاخص بازار به‌اندازه یک بازده مازاد مشخص α است. برای مدل‌سازی این هدف، به‌جای استفاده از نرخ بازده شاخص بازار، R^I، می‌توان از یک متغیر تصادفی به نام $R^\alpha=R^I+\alpha$ استفاده کرد که نشان‌دهنده نرخ بازده‌ای است که به‌اندازه α از نرخ بازده شاخص بازار بیشتر است. در این حالت، تحقق این متغیر در سناریوی t با نماد $r_t^\alpha=r_t^I+\alpha$ برای $t=1,\dots,T$ تعریف می‌شود که میانگین نرخ بازده آن برابر $\mu^\alpha=\sum_{t=1}^{T}r_t^\alpha p_t$ خواهد بود. با اعمال این ایده به نسبت سورتینو اصلاح‌شده‌ی فوق، شکل نسبت به‌صورت زیر تغییر می‌کند؛

$$\frac{E\{R_x-\mu^\alpha\}}{\sqrt{E\{(R_x-\mu^\alpha)_-^2\}}}=\frac{E(R_x)-\mu^\alpha}{\sqrt{\sum_{t=1}^{T}(\max\{\mu^\alpha-r_t,0\})^2p_t}} \quad \text{رابطه (۸)}$$

شایان ذکر است زمانی‌که $\alpha=0$ شود، رابطه ۸ به رابطه ۷ تغییر پیدا خواهد کرد.

درصورتی‌که به‌جای نیم انحراف معیار به‌عنوان معیار ریسک، از میانگین انحراف زیر هدف[6] یا به‌عبارت دیگر اولین گشتاور جزئی پایین[7] استفاده شود، رابطه ۸ را می‌توان ساده‌سازی نمود. برای یک مقدار هدف مشخص τ، این معیار به‌صورت زیر تعریف می‌شود؛

$$\delta_\tau(R_x)=E\{(R_x-\tau)_-\}=E\{\max\{\tau-R_x,0\}\} \quad \text{رابطه (۹)}$$

در رابطه فوق $\delta_\tau(R_x)$ به‌صورت زیر در چارچوب برنامه‌ریزی خطی قابل محاسبه است؛

$$\delta_\tau(R_x)=\min\left\{\sum_{t=1}^{T}d_tp_t : d_t\geq\tau-\sum_{i=1}^{n}r_{it}x_i\,, d_t\geq 0\right\} \quad \text{رابطه (۱۰)}$$

1. Meade & Beasley
2. Sortino ratio
3. Sortino & Price
4. semi-standard deviation
5. index-plus-alpha portfolio
6. mean below-target deviation
7. first Lower Partial Moment (LPM)

درصورتی‌که در رابطه ۸ به‌جای معیار نیم انحراف معیار از $\delta_\tau(R_x)$ با مقدار هدف μ^α استفاده شود، یعنی $\delta_{\mu^\alpha}(R_x)$، آن‌گاه نسبت سورتینو اصلاح‌شده[1] به‌صورت زیر قابل بیان است؛

رابطه (۱۱)
$$S_{\mu^\alpha}(R_x) = \frac{E\{R_x - \mu^\alpha\}}{E\{(R_x-\mu^\alpha)_-\}} = \frac{E(R_x)-\mu^\alpha}{\delta_{\mu^\alpha}(R_x)} = \frac{E(R_x)-\mu^\alpha}{\sum_{t=1}^{T}\max\{\mu^\alpha - r_t, 0\}p_t}$$

بنابراین، بیشینه‌سازی نسبت $S_{\mu^\alpha}(R_x)$ معادل است با مدل پرتفوی مماسی که در آن از $\delta_\tau(R_x)$ به‌عنوان معیار ریسک استفاده شده و μ^α نقش نرخ بازده بدون ریسک را ایفا می‌کند.

نسبت پتانسیل صعودی[2] معیاری است که امکان انتخاب سرمایه‌گذاری‌هایی را فراهم می‌سازد که عملکرد صعودی قابل‌توجهی (نسبت به یک هدف مشخص)، در قبال واحدی از ریسک نزولی دارند. فرمول‌بندی کلاسیک این نسبت (براساس سورتینو و همکاران (۱۹۹۹)) از نیم انحراف معیار به‌عنوان معیار ریسک نزولی استفاده می‌کند و با در نظر گرفتن هدف μ^α، به‌صورت زیر بیان می‌شود؛

رابطه (۱۲)
$$\frac{E\{(R_x-\mu^\alpha)_+\}}{\sqrt{E\{(R_x-\mu^\alpha)_-^2\}}} = \frac{\sum_{t=1}^{T}\max\{r_t-\mu^\alpha, 0\}p_t}{\sqrt{\sum_{t=1}^{T}(\max\{\mu^\alpha - r_t, 0\})^2 p_t}}$$

در رابطه ۱۲ درصورتی‌که از $\delta_{\mu^\alpha}(R_x)$ به‌عنوان معیار ریسک استفاده شود، نسبت پتانسیل صعودی به نسبت امگا با مقدار هدف μ^α تبدیل می‌شود؛ به‌عبارت دیگر؛

رابطه (۱۳)
$$\Omega_{\mu^\alpha}(R_x) = \frac{E\{(R_x-\mu^\alpha)_+\}}{E\{(R_x-\mu^\alpha)_-\}} = \frac{\sum_{t=1}^{T}\max\{r_t-\mu^\alpha, 0\}p_t}{\sum_{t=1}^{T}\max\{\mu^\alpha - r_t, 0\}p_t}$$

ازآن‌جایی‌که بیشینه‌سازی نسبت $\Omega_{\mu^\alpha}(R_x)$ معادل بیشینه‌سازی نسبت $S_{\mu^\alpha}(R_x)$ است، می‌توان اثبات کرد که $\Omega_{\mu^\alpha}(R_x)$، با اصل تسلط تصادفی مرتبه دوم[3] سازگار است. بیشینه‌سازی نسبت سورتینو اصلاح‌شده را می‌توان به‌صورت مدل برنامه‌ریزی غیرخطی زیر بیان نمود؛

مدل (۱)
$$\begin{aligned}
\max \quad & \frac{z-\mu^\alpha}{z_1} \\
\text{subject to} \quad & \sum_{i=1}^{n} x_i = 1,\ \ x_i \ge 0,\ \ i = 1,\dots,n \\
& \sum_{i=1}^{n} r_i x_i = z \\
& \sum_{i=1}^{n} r_{it} x_i = r_t,\ \ t = 1,\dots,T \\
& \sum_{t=1}^{T} d_t p_t = z_1 \\
& d_t \ge \mu^\alpha - r_t,\ \ d_t \ge 0,\ \ t = 1,\dots,T.
\end{aligned}$$

مانسینی و همکاران (۲۰۰۳) نشان داده‌اند که مدل‌های بهینه‌سازی نسبت‌های عملکردی را می‌توان به فرم برنامه‌ریزی خطی تبدیل کرد. مدل بهینه‌سازی غیرخطی ۱ را می‌توان طبق روش ارائه‌شده توسط مانسینی و همکاران (۲۰۰۳) به‌صورت مدل برنامه‌ریزی خطی بازنویسی کرد. برای این منظور، ابتدا متغیرهای کمکی $v = z/z_1$ و $v_0 = 1/z_1$ معرفی می‌شوند که منجر به تابع هدف خطی‌شده $v - \mu^\alpha v_0$ می‌گردد. سپس، برای خطی‌سازی تمامی محدودیت‌ها، تمامی قیود مدل بر z_1 تقسیم و جایگزینی‌های زیر اعمال می‌شود (Mansini et al., 2003)؛

رابطه (۱۴)
$$\tilde{d}_t = d_t/z_1, \qquad t = 1,\dots,T$$

رابطه (۱۵)
$$\tilde{r}_t = r_t/z_1, \qquad t = 1,\dots,T$$

1. adapted Sortino ratio
2. upside-potential ratio
3. second-order stochastic dominance

رابطه (۱۶)
$$\tilde{x}_i = x_i/z_1 , \qquad i = 1, \dots, n$$

در نهایت، با این تبدیل‌ها، فرمول‌بندی برنامه‌ریزی خطی مدل مبتنی بر نسبت امگا حاصل می‌شود.

مدل (۲)
$$\begin{aligned}
(OR\ model) \quad & \max && v - \mu^{\alpha} v_0 \\
& \text{subject to} && \sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_i = v_0,\ \ v_0 \le M,\ \ \tilde{x}_i \ge 0,\ \ i = 1, \dots, n \\
& && \sum_{i=1}^{n} r_i \tilde{x}_i = v \\
& && \sum_{i=1}^{n} r_{it} \tilde{x}_i = \tilde{r}_t,\ \ t = 1, \dots, T \\
& && \sum_{t=1}^{T} \tilde{d}_t p_t = 1 \\
& && \tilde{d}_t \ge \mu^{\alpha} v_0 - \tilde{r}_t,\ \ \tilde{d}_t \ge 0,\ \ t = 1, \dots, T.
\end{aligned}$$

پس از حل مسئله مدل ۲، مقادیر متغیرهای اصلی x_i را می‌توان با تقسیم متغیرهای تبدیل‌شده $\tilde{x}_i$ بر v_0 به دست آورد. همچنین $\delta_{\mu^{\alpha}}(R_x) = 1/v_0$ و $E(R_x) = v/v_0$ است.

مدل‌های مبتنی بر ارزش در معرض ریسک. ارزش در معرض ریسک (VaR_{α}) حداکثر زیان ممکن را در یک سطح اطمینان مشخص $\alpha \in (0,1)$ اندازه‌گیری می‌کند و به‌صورت زیر تعریف می‌شود؛

رابطه (۱۷)
$$VaR_{\alpha}(L_x) = \min\{l \in \mathbb{R} | F_{L_x}(l) = \Pr(L_x \le l) \ge \alpha\}$$

که در رابطه ۱۷، $F_{L_x}(l)$ توزیع تجمعی برای زیان پرتفوی، L_x، است. اگر توزیع بازده پرتفوی نرمال فرض شود، آنگاه کمینه‌سازی VaR_{α} یک برنامه‌ریزی محدب است و بنابراین یک جواب مطلق دارد. اما، درصورتی‌که توزیع نرمال نباشد، مسئله بهینه‌سازی VaR_{α} به لحاظ محاسباتی چالش‌برانگیز خواهد بود.

ارزش در معرض ریسک شرطی $(CVaR_{\alpha})$ که میانگین مقادیر ذیل دنباله راست توزیع زیان، L_x، در سطح اطمینان α است به‌صورت زیر توصیف می‌شود (Rockafellar & Uryasev, 2002)؛

رابطه (۱۸)
$$G_{\alpha}(L_x, l) = \begin{cases} 0, & l < VaR_{\alpha}(L_x) \\ \dfrac{F_{L_x}(l) - \alpha}{1 - \alpha}, & l \ge VaR_{\alpha}(L_x) \end{cases}$$

در واقع، ارزش در معرض ریسک شرطی به‌عنوان میانگین زیان‌های فراتر از VaR یا به‌طور معادل میانگین بازده‌های کمتر از VaR در سطح اطمینان α تعریف می‌شود.

راکفلر و اوریاسف (۲۰۰۰) ثابت کرده‌اند که کمینه‌سازی $CVaR_{\alpha}$ را می‌توان با یک برنامه‌ریزی خطی برای توزیع‌های پیوسته از طریق روش‌های نمونه‌برداری[1]، ازجمله شبیه‌سازی مونت‌کارلو، تخمین زد. مسئله بهینه‌سازی $CVaR_{\alpha}$ به‌صورت زیر بیان می‌شود؛

مدل (۳)
$$\begin{aligned}
(CVaR_{\alpha}) \quad & \min \beta + \frac{1}{(1-\alpha)} \sum_{t=1}^{T} p_t u_t \\
& \text{subject to} \\
& u_t + \beta + \sum_{i=1}^{n} r_{it} x_i \ge 0, t = 1, \dots, T \\
& x \in X,\ \ u_t \ge 0, t = 1, \dots, T
\end{aligned}$$

که در مدل ۳، $u_t = (-\sum_{i=1}^{n} r_{it} x_i - \beta)_+$ برای $t = 1, \dots, T$، T متغیر کمکی است.

1. sampling technique

مدل مبتنی بر نسبت امگا و معیار ارزش در معرض ریسک شرطی. برای توزیع زیان پرتفوی، L_x و یک نقطه آستانه‌ای ثابت L، نسبت امگا رابطه ۱۳ به‌صورت زیر بازنویسی می‌گردد؛

رابطه (۱۹)
$$\Omega_L(L_x) = \frac{\int_{-\infty}^{L} \Pr(L_x < l)dl}{\int_{L}^{\infty} \Pr(L_x > l)dl} = \frac{E\{(L - L_x)_+\}}{E\{(L_x - L)_+\}}$$

مدل بهینه‌سازی نسبت امگا با استفاده از توزیع زیان پرتفوی، L_x، به صورت زیر تعریف می‌شود؛

مدل (۴)
$$(P_1) \qquad \max \qquad \Omega_L(L_x) = \frac{E\{(L - L_x)_+\}}{E\{(L_x - L)_+\}}$$
$$\text{subject to} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \ \ x_i \geq 0, \ \ i = 1, \dots, n$$

یکی از روش‌های طبیعی و محاسباتی کارآمد برای نمایش عدم قطعیت، استفاده از تعداد متناهی سناریوها است. با الهام از این رویکرد، برای تقریب تابع $\Omega_L(L_x)$، تعداد T سناریوی متناهی از متغیر تصادفی L_x (با استفاده از تکنیک‌های نمونه‌گیری) در نظر گرفته می‌شود. در این حالت، بردار احتمال به صورت زیر تعریف می‌شود:

رابطه (۲۰)
$$P = \left\{ p = (p_1, \dots, p_T): \sum_{t=1}^{T} p_t = 1 \, , p_t \geq 0, t = 1, \dots, T \right\}$$

براین‌اساس، مسئله بهینه‌سازی اولیه P_1 را می‌توان به‌صورت برنامه‌ریزی کسری[1] زیر بازنویسی کرد:

مدل (۵)
$$(P_2) \qquad \max \qquad \Omega_L(L_x) = \frac{\sum_{t=1}^{T} p_t u_t}{\sum_{t=1}^{T} p_t d_t}$$
$$\text{subject to} \quad \sum_{i=1}^{n} l_{it} x_i + u_t - d_t = L, \qquad t = 1, \dots, T$$
$$u_t \times d_t = 0, \qquad t = 1, \dots, T$$
$$x \in X, \ \ u_t, d_t \geq 0, \qquad t = 1, \dots, T$$

که در مدل ۵، $u_t = (L - \sum_{i=1}^{n} l_{it} x_i)_+$ و $d_t = (\sum_{i=1}^{n} l_{it} x_i - L)_+$ برای $t = 1, \dots, T$، متغیرهای کمکی هستند. همچنین محدودیت دوم نشان می‌دهد که در هر سناریو، زیان پرتفوی یا کمتر از نقطه آستانه‌ای، L، و یا بیشتر از آن است؛ اما نه هر دو به‌طور همزمان. وجود این نوع محدودیت‌ها باعث می‌شود که مدل ۵، یک مسئله غیرخطی نامحدب[2] باشد و در نتیجه، یافتن جواب بهینه سراسری نیازمند استفاده از حل‌کننده‌های پیشرفته‌ی غیرخطی باشد (Dueck & Scheuer, 1990; Huyer & Neumaier, 1999).

در ادامه و مطابق با رویکرد ماوسر[3] و همکاران (۲۰۰۶)، برای حل این مسئله، از تکنیک تبدیل چارنز و کوپر[4] (۱۹۶۲) استفاده می‌شود. این تبدیل، مدل P_2 را به شکل برنامه‌ای معادل زیر بازنویسی می‌کند که از آن با عنوان مدل $Omega$ یاد می‌شود؛

مدل (۶)
$$(Omega) \qquad \max \qquad \widetilde{\Omega_L(L_x)} = \sum_{t=1}^{T} p_t \tilde{u}_t$$
$$\text{subject to} \quad \sum_{i=1}^{n} l_{it} \tilde{x}_i + \tilde{u}_t - \tilde{d}_t = \tilde{L}, \qquad t = 1, \dots, T$$
$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_i = \gamma$$
$$\sum_{t=1}^{T} p_t \tilde{d}_t = 1$$
$$\tilde{x}_i \geq 0, \qquad i = 1, \dots, n$$
$$\tilde{u}_t, \tilde{d}_t \geq 0, \qquad t = 1, \dots, T$$

1. fractional programming
2. nonconvex nonlinear Problem
3. Mausser
4. Charnes & Cooper

که در مدل ۶ $\gamma > 0$ یک متغیر همگن‌ساز[1] است. همچنین $\tilde{x}_i = x_i\gamma$ به ازای هر $i = 1, \dots, n$، $\tilde{u}_t = u_t\gamma$، $\tilde{d}_t = d_t\gamma$ و $\tilde{L} = L\gamma$ به ازای هر $t = 1, \dots, T$ هستند.

راه‌حل بهینه مدل P_2 از راه‌حل بهینه مدل $Omega$ بدست خواهد آمد اگر و تنها اگر $\max \widetilde{\Omega_L(L_x)} > 1$ یا به‌طور معادل $L > \min_{\sum_{i=1}^{n} x_i=1, x_i\geq 0, i=1,\dots,n} E\{L_x\}$ باشد. در عمل، بیشتر راهبردهای بهینه‌سازی پرتفوی به‌گونه‌ای طراحی می‌شوند که مقدار بهینه نسبت امگا کمتر یا مساوی با یک نباشد. در نتیجه، بهینه‌سازی نسبت امگا معادل است با حل مدل برنامه‌ریزی خطی $Omega$ که این رویکرد، دستیابی به راه‌حل بهینه سراسری برای مدل P_2 را تضمین می‌کند (Charnes & Cooper, 1962; Mausser et al., 2006).

حال درصورتی‌که در رابطه نسبت امگا (رابطه ۱۹)، $L(\alpha) := CVaR_\alpha^*(L_w)$ که مقدار بهینه تابع هدف مدل ۳ برای پرتفوی معیار، w، است، به‌عنوان جایگزین مقدار آستانه‌ای، L، تعیین گردد، نسبت امگای جدید برای یک سطح اطمینان مشخص، $0 < \alpha < 1$، به‌صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\Omega_{L(\alpha)}(L_x) = \frac{E\{(L(\alpha) - L_x)_+\}}{E\left\{\left(L_x - L(\alpha)\right)_+\right\}} \qquad \text{رابطه (۲۱)}$$

در نهایت با ترکیب دو مدل ۳ و ۵، بهینه‌سازی نسبت امگا با درنظرگرفتن $L(\alpha) = CVaR_\alpha^*(L_w)$ به‌صورت زیر خواهد بود؛

$$\begin{aligned}
(P_3) \qquad & \max \qquad \Omega_{L(\alpha)}(L_x) = \frac{\sum_{t=1}^{T} p_t u_t}{\sum_{t=1}^{T} p_t d_t} \\
& \text{subject to} \quad \sum_{i=1}^{n} l_{it} x_i + u_t - d_t = L(\alpha), \qquad t = 1, \dots, T \\
& \qquad u_t \times d_t = 0, \qquad t = 1, \dots, T \\
& \qquad x \in X, \;\; u_t, d_t \geq 0, \qquad t = 1, \dots, T \\
& \qquad L(\alpha) \leq \min \beta + \frac{1}{(1-\alpha)} \sum_{t=1}^{T} q_t \hat{u}_t
\end{aligned} \qquad \text{مدل (۷)}$$

در مقایسه با مدل ۵، بهینه‌سازی نسبت امگا با آستانه $L(\alpha) = CVaR_\alpha^*(L_w)$ شامل یک مسئله کمینه‌سازی داخلی اضافی یعنی مدل ۳ در قیود نیز می‌باشد. برای حل مسئله کمینه‌سازی داخلی، رفتار تابع $\Omega_{L(\alpha)}(L_x)$ نسبت به $L(\alpha)$ بررسی و از وجود شکاف دوگانگی صفر[2] در مدل ۳ بهره گرفته می‌شود. برای یک مقدار ثابت α، تابع $\Omega_{L(\alpha)}(L_x)$ یک تابع افزایشی نسبت به $L(\alpha)$ است؛ به این معنا که بیشینه مقدار آن در کران بالایی $L(\alpha)$ به‌دست می‌آید. با بهره‌گیری از این ویژگی و همچنین وجود شکاف دوگانگی صفر در مدل ۳، می‌توان مسئله کمینه‌سازی داخلی را از طریق مسئله دوگان بیشینه‌سازی متناظر آن به‌صورت زیر حل نمود؛

$$\begin{aligned}
(DCVaR_\alpha) \qquad & \max \qquad \vartheta \\
& \text{subject to} \quad v_t - \tfrac{q_t}{(1-\alpha)} \leq 0, \;\; t = 1, \dots, T \\
& \qquad - \sum_{t=1}^{T} l_{rt}^{w} v_t + \vartheta \leq 0, \;\; r = 1, \dots, m \\
& \qquad - \sum_{t=1}^{T} v_t = 1, \;\; v_t \geq 0, \qquad t = 1, \dots, T
\end{aligned} \qquad \text{مدل (۸)}$$

در نهایت، با ترکیب مدل‌های ۷ و ۸ و استفاده از تکنیک تبدیل چارنز و کوپر (۱۹۶۲)، مدل خطی $Omega - CVaR_\alpha$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید؛

1. homogenization variable
2. zero duality gap

مدل (۹)

$$(Omega-CVaR_\alpha)\quad \max \quad \Omega_{\widetilde{L(\alpha)}}(L_x)=\sum_{t=1}^{T} p_t\tilde{u}_t$$

$$\text{subject to}\quad \sum_{i=1}^{n} l_{it}\tilde{x}_i+\tilde{u}_t-\tilde{d}_t=\widetilde{L(\alpha)},\qquad t=1,\dots,T$$

$$\widetilde{L(\alpha)}\le\tilde{\vartheta}$$

$$\tilde{v}_t-\frac{\gamma}{(1-\alpha)}q_t\le 0,\ \ t=1,\dots,T$$

$$-\sum_{t=1}^{T} l_{rt}^{w}\tilde{v}_t+\tilde{\vartheta}\le 0,\ \ r=1,\dots,m$$

$$\sum_{i=1}^{n}\tilde{x}_i=\gamma$$

$$\sum_{t=1}^{T}p_t\tilde{d}_t=1$$

$$\sum_{t=1}^{T}\tilde{v}_t=\gamma$$

$$\sum_{t=1}^{T}p_t\tilde{u}_t>1+\epsilon$$

$$\tilde{x}_i\ge 0,\tilde{x}_i\ge w_{min}\times\gamma,\tilde{x}_i\le w_{max}\times\gamma,\qquad i=1,\dots,n$$

$$\tilde{u}_t,\tilde{d}_t,\tilde{v}_t,\epsilon\ge 0,\qquad t=1,\dots,T$$

$$\tilde{\vartheta}\in\mathbb{R}$$

که در مدل ۹، $\gamma>0$ یک متغیر همگن‌ساز و w_{min} و w_{max} به‌ترتیب کران‌های حداقل و حداکثر وزن هستند. همچنین برای هر متغیر ϕ، $\tilde{\phi}=\gamma\phi$ و مدل $Omega-CVaR_\alpha$ بر حسب هریک از متغیرهای $\tilde{x}$، $\tilde{u}$، $\tilde{d}$، γ، $\tilde{v}$ و $\tilde{\vartheta}$ خطی است (Charnes & Cooper, 1962).

مدل رقیب. مشابه پژوهش گوئل[1] و همکاران (۲۰۱۸) از مدل مبتنی بر نسبت $STARR$ برای ردیابی بهبودیافته شاخص استفاده می‌شود. نسبت $STARR$ از معیار ارزش در معرض ریسک شرطی به‌منظور کنترل زیان‌های شدید در توزیع بازده پرتفوی استفاده می‌کند. مسئله بهینه‌سازی نسبت $STARR$ یک مسئله برنامه‌ریزی خطی است. این موضوع انگیزه‌ای برای درنظرگرفتن نسبت $STARR$ برای حل مسئله ردیابی بهبودیافته شاخص شد (Martin et al., 2005). نسبت $STARR$ در سطح اطمینان α به‌صورت زیر تعریف می‌شود؛

رابطه (۲۲)

$$STARR_\alpha(R_x)=\frac{E(R_x-\mu^I)}{CVaR_\alpha(\mu^I-R_x)}$$

مدل بهینه‌سازی برای $STARR_\alpha(R_x)$ در سطح اطمینان $\alpha\in(0,1)$، که یک مسئله بهینه‌سازی محدب است، به‌صورت زیر تعریف می‌شود؛

مدل (۱۰)

$$(STARR_\alpha)\quad \max\quad \sum_{i=1}^{n} r_i\tilde{x}_i-\gamma\mu^I$$

$$\text{subject to}\quad \tilde{\beta}+\frac{1}{(1-\alpha)}\sum_{t=1}^{T}p_t\tilde{u}_t=1,$$

$$\tilde{u}_t+\tilde{\beta}+\left(\sum_{i=1}^{n}r_{it}\tilde{x}_i-\gamma r_t^I\right)\ge 0, t=1,\dots,T$$

$$\sum_{i=1}^{n}\tilde{x}_i=\gamma$$

$$\tilde{x}_i\ge 0,\tilde{x}_i\ge w_{min}\times\gamma,\tilde{x}_i\le w_{max}\times\gamma,\qquad i=1,\dots,n$$

$$\tilde{u}_t\ge 0,\qquad t=1,\dots,T$$

1. Goel

که در مدل ۱۰، $\gamma > 0$ یک متغیر همگن‌ساز، $\widetilde{u_t} = \max\left(-(\sum_{i=1}^{n} r_{it}\widetilde{x_i} - r_t^I) - \tilde{\beta}, 0\right),\ t = 1, \dots, T$ و w_{min} و w_{max} به‌ترتیب کران‌های حداقل و حداکثر وزن هستند.

روش تجزیه‌وتحلیل داده‌ها. مشابه پژوهش برونی و همکاران (۲۰۱۷)، روش پنجره غلتان[1] با دوره ۱۲ هفته‌ای دنبال می‌شود. دوره داخل نمونه[2] (نمونه آموزش) و دوره خارج از نمونه[3] (نمونه تست) به ترتیب ۵۲ و ۱۲ هفته است (Bruni et al., 2017). بازه زمانی موردنظر شامل ۳۶۴ مشاهده (قیمت هفتگی از ابتدای بهمن‌ماه ۱۳۹۶ تا پایان آذرماه ۱۴۰۴) است. در نهایت، با تقسیم‌بندی این تعداد مشاهده به دوره داخل نمونه و غلتاندن آن با دوره زمانی ۱۲ هفته‌ای، ۳۰ پنجره ایجاد می‌شود که هر پنجره شامل ۵۲ مشاهده داخل نمونه و ۱۲ مشاهده خارج از نمونه است. از طرفی برای هر پنجره زمانی ۵۲ هفته‌ای، تنها شرکت‌هایی مورد بررسی قرار گرفته‌اند که داده‌های قابل اتکا و با کیفیت داشته باشند؛ به این معنا که اگر نماد شرکتی در یک پنجره زمانی بیش از یک ماه (بیش از چهار هفته متوالی) بسته باشد، داده‌های مربوط به آن سهم در آن پنجره زمانی حذف شده است. همچنین، فقط شرکت‌هایی در نظر گرفته شده‌اند که میانگین ارزش معاملات هفتگی آن‌ها در همان بازه زمانی حداقل ۵۰ میلیارد ریال باشد. براین‌اساس، تعداد شرکت‌هایی که در هر پنجره زمانی وارد فرایند مدل‌سازی می‌شوند، بسته به شرایط مذکور، ممکن است متفاوت باشد.

بازده هفتگی سهام به‌صورت $r_{it} = \frac{P_{it} - P_{it-1}}{P_{it-1}}$ به ازای $i = 1, \dots, n$ و $t = 1, \dots, T$ به‌دست می‌آید، جایی که P_{it} و P_{it-1} به ترتیب قیمت پایانی (تعدیل‌شده بر اساس افزایش سرمایه و سود تقسیمی) سهم i در هفته t و $t-1$ است. همچنین، در صورت بسته بودن نماد برخی سهام، مطابق رابطه محاسبه شاخص، از قیمت پایانی قبل از بسته شدن نماد استفاده خواهد شد.

لازم به ذکر است، مقادیر بهینه کلیه پارامترهای مدل ۹ و ۱۰ در هر پنجره بصورت جداگانه و صرفاً با داده‌های داخل‌نمونه همان پنجره محاسبه می‌شود. همچنین سطح اطمینان $\alpha \in (0, 1)$، برای تمامی مدل‌ها ۹۵ درصد در نظر گرفته می‌شود.

معیارهای ارزیابی عملکرد. به‌منظور بررسی عملکرد پرتفوی‌های حاصل‌شده از طریق مدل پژوهش، معیارهای استاندارد همبستگی با شاخص، بتا رگرسیون، خطای ردیابی و نسبت اطلاعات[4] مورد ارزیابی قرار می‌گیرند. خطای ردیابی عبارت است از ریشه دوم گشتاور مرتبه دوم غیر مرکزی انحرافات بازده پرتفوی ردیاب از شاخص که رابطه آن به‌صورت زیر است؛

رابطه (۲۳)
$$TE = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{T}(r_t - r_t^I)^2}{T-1}}$$

همچنین نسبت اطلاعاتی (IR) میانگین بازده مازاد برای هر واحد خطای ردیابی را نشان می‌دهد و به‌صورت زیر تعریف می‌شود؛

رابطه (۲۴)
$$IR = \frac{E(R_x) - \mu^I}{TE}$$

1. rolling window
2. in-sample period
3. out-of-sample
4. information ratio

٤. تحلیل داده‌ها و یافته‌های پژوهش

در این بخش، نتایج حاصل از پیاده‌سازی مدل پیشنهادی ($Omega - CVaR$) در ۳۰ پنجره زمانی غلتان و مقایسه عملکرد آن با شاخص قیمتی بورس و مدل رقیب ارائه شده است.

جدول ۱. *مقادیر بهینه پارامترهای مدل پیشنهادی (*$\Omega_{\widetilde{L(0.95)}}(L_x)$*،* $L(0.95)$ *و تعداد سهام تشکیل‌دهنده پرتفوی) در هر پنجره زمانی*

Table 1. Optimal values of the proposed model parameters ($\Omega_{\widetilde{L(0.95)}}(L_x)$, $L(0.95)$, and the number of constituent shares in the portfolio) in each window number

پنجره زمانی	$\Omega_{\widetilde{L(0.95)}}(L_x)$	$L(0.95)$	تعداد سهام تشکیل‌دهنده پرتفوی
۱	۱,۶۴۱	۳/۳۲٪	۶
۲	۸,۳۸۴	۳/۴۴٪	۵
۳	۵,۶۹۱	۲/۴۴٪	۸
۴	۱۱,۸۷۵	۰/۶۵٪	۱۲
۵	۲,۱۲۰	-۰/۷۲٪	۱۶
۶	۲,۰۷۱	۱/۶۱٪	۹
۷	۲,۰۱۹	۱/۳۸٪	۹
۸	۳۰۳,۳۶۰	-۰/۰۳٪	۱۲
۹	۵۲۲	-۰/۴۵٪	۱۲
۱۰	۱۳,۰۷۰	-۰/۶۵٪	۱۵
۱۱	۷۹,۶۲۹	-۰/۳۲٪	۱۸
۱۲	۲,۱۵۹	۱/۱۹٪	۱۲
۱۳	۶۶۴	-۰/۳۳٪	۲۱
۱۴	۳۹۷,۴۵۳	-۰/۳۳٪	۱۷
۱۵	۱,۶۴۷,۸۳۱	۲/۷۱٪	۱۲
۱۶	۱۵,۳۹۷	۱/۴۶٪	۱۵
۱۷	۱۶۰	-۰/۳۷٪	۱۴
۱۸	۲۲,۷۳۳	-۰/۱۷٪	۱۵
۱۹	۲۳,۶۰۵	-۰/۲۷٪	۱۵
۲۰	۶,۱۸۸	-۰/۳۸٪	۱۵
۲۱	۳۲,۸۹۳	-۰/۷۹٪	۱۸
۲۲	۹,۶۶۳	-۱/۱۵٪	۱۸
۲۳	۵۷۱,۶۱۱	-۰/۵۲٪	۱۳
۲۴	۳۶,۴۳۹	-۰/۵۸٪	۲۱
۲۵	۳,۳۷۷	-۰/۴۸٪	۲۳
۲۶	۵۷	-۰/۴۴٪	۱۴
۲۷	۸,۵۲۶	۰/۸۵٪	۱۰
۲۸	۱۷,۸۴۹	-۰/۵۳٪	۱۸
۲۹	۹۱	-۰/۲۹٪	۱۳
۳۰	۸۸	-۰/۳۴٪	۱۱
میانگین	۱۰۷,۵۷۲	۰/۳۳٪	۱۴
میانه	۸,۴۵۵	-۰/۳۲٪	۱۴
انحراف معیار	۳۱۹,۲۶۴	۱/۲۸٪	۴
مینیمم	۵۷	-۱/۱۵٪	۵
ماکسیمم	۱,۶۴۷,۸۳۱	۳/۴۴٪	۲۳

ابتدار در جدول ۱، مقادیر بهینه پارامترهای مدل ۹، شامل $\widetilde{\Omega_{L(0.95)}(L_x)}$، $L(0.95)$ و تعداد سهام تشکیل‌دهنده پرتفوی در هر یک پنجره‌های زمانی آورده شده است. نتایج نشان می‌دهد که در هر پنجره زمانی مقدار $\widetilde{\Omega_L(L_x)}$ تحت تکنیک تبدیل چارنز و کوپر (۱۹۶۲)، بزرگتر از یک می‌باشد و فرض مربوطه در تمامی پنجره‌های زمانی تصدیق می‌گردد. همچنین نتایج $L(0.95)$ در هر پنجره زمانی که حاکی از مقادیر بهینه $CVaR_{95\%}$ می‌باشد، نشان می‌دهد که میانگین این مقادیر برابر ۰/۳۳ درصد است. علاوه‌بر این، به‌طور میانگین پرتفوی هر پنجره زمانی متشکل از ۱۴ سهم می‌باشد.

جدول ۲. *بررسی توزیع عملکرد خارج از نمونه و آماره‌های توصیفی پرتفوی‌های حاصل‌شده با مدل پژوهش در هر پنجره زمانی*

Table 2. Examining the out-of-sample performance distribution and the descriptive statistics of the portfolios generated by the research model in each window number

پنجره زمانی	بازده شاخص		بازده پرتفوی‌های حاصل‌شده با مدل پژوهش							
	میانگین	حداکثر افت سرمایه	میانگین	میانه	انحراف معیار	چولگی	مازاد کشیدگی	مینیمم	ماکسیمم	حداکثر افت سرمایه
۱	۱/۷۰٪	۳/۴۷٪	۱/۲۴٪	۱/۲۸٪	۲/۴۳٪	۰/۲۵	-۱/۳۴	-۲/۰۲٪	۴/۹۸٪	۲/۳۱٪
۲	۱/۶۶٪	۴/۶۱٪	۲/۵۹٪	۳/۲۲٪	۴/۰۰٪	۰/۸۵	۱/۴۵	-۲/۳۷٪	۱۱/۸۷٪	۲/۳۷٪
۳	۱/۹۴٪	۲/۱۹٪	۲/۸۹٪	۳/۷۸٪	۴/۷۶٪	-۰/۸۱	-۰/۱۵	-۶/۶۰٪	۹/۲۶٪	۶/۶۰٪
۴	۰/۸۵٪	۶/۷۸٪	۱/۵۵٪	۳/۱۲٪	۶/۹۷٪	-۰/۴۷	-۰/۸۲	-۱۰/۳۶٪	۱۰/۹۱٪	۲۳/۲۷٪
۵	۳/۰۹٪	۷/۸۹٪	۲/۶۷٪	۴/۱۴٪	۷/۳۲٪	-۰/۶۱	۰/۰۳	-۱۱/۹۵٪	۱۲/۵۴٪	۱۱/۹۵٪
۶	۷/۱۶٪	۷/۹۰٪	۴/۴۱٪	۳/۷۰٪	۴/۱۰٪	۱/۲۰	۰/۹۹	۰/۳۱٪	۱۳/۴۷٪	۰/۰۰٪
۷	۳/۱۰٪	۱۹/۹۷٪	۵/۴۱٪	۶/۲۳٪	۵/۷۵٪	۰/۰۰	-۱/۷۰	-۱/۶۴٪	۱۳/۲۹٪	۲/۶۸٪
۸	-۱/۲۹٪	۲۸/۵۵٪	-۰/۸۷٪	-۰/۰۹٪	۴/۹۵٪	۰/۰۵	-۱/۳۷	-۷/۸۲٪	۶/۵۷٪	۲۱/۲۷٪
۹	-۰/۷۴٪	۲۲/۲۹٪	۰/۴۷٪	۰/۵۹٪	۰/۷۹٪	-۰/۰۱	-۰/۵۱	-۰/۷۱٪	۱/۸۵٪	۱/۰۷٪
۱۰	-۰/۵۷٪	۱۱/۹۲٪	-۰/۳۳٪	-۰/۲۶٪	۰/۷۴٪	-۱/۰۲	۱/۷۹	-۲/۰۷٪	۰/۶۶٪	۴/۵۵٪
۱۱	۱/۸۵٪	۴/۱۴٪	۰/۱۱٪	۰/۱۷٪	۰/۱۹٪	-۱/۰۹	۰/۵۴	-۰/۳۰٪	۰/۳۲٪	۰/۳۰٪
۱۲	-۰/۵۲٪	۱۰/۶۶٪	-۲/۰۳٪	-۰/۷۴٪	۳/۷۱٪	-۱/۰۶	۰/۴۴	-۱۰/۱۱٪	۲/۰۵٪	۲۵/۰۳٪
۱۳	-۱/۰۶٪	۱۶/۰۱٪	۰/۳۳٪	۰/۳۳٪	۰/۰۵٪	-۰/۴۷	۰/۶۱	۰/۲۱٪	۰/۴۱٪	۰/۰۰٪
۱۴	۱/۷۳٪	۱/۵۹٪	۰/۳۸٪	۰/۳۷٪	۰/۱۰٪	۰/۴۱	۰/۴۸	۰/۲۲٪	۰/۵۶٪	۰/۰۰٪
۱۵	-۰/۲۸٪	۸/۴۰٪	۰/۰۸٪	۰/۰۷٪	۲/۱۹٪	۰/۰۶	-۱/۳۷	-۳/۲۳٪	۳/۳۹٪	۹/۲۲٪
۱۶	-۱/۳۸٪	۱۵/۳۸٪	-۰/۴۰٪	-۰/۱۵٪	۱/۱۷٪	-۰/۲۱	-۰/۹۲	-۲/۲۴٪	۱/۴۴٪	۷/۲۷٪
۱۷	۱/۸۹٪	۶/۸۹٪	۰/۴۱٪	۰/۴۲٪	۰/۰۴٪	-۰/۱۳	۱/۷۳	۰/۳۳٪	۰/۴۹٪	۰/۰۰٪
۱۸	۱/۵۱٪	۱۰/۱۰٪	۱/۷۴٪	۱/۴۳٪	۲/۵۴٪	۰/۲۴	-۰/۳۳	-۲/۶۱٪	۵/۹۲٪	۲/۶۱٪
۱۹	۰/۹۲٪	۱۳/۷۹٪	۱/۵۶٪	۲/۳۲٪	۴/۵۱٪	-۰/۴۶	-۱/۵۲	-۵/۱۳٪	۶/۸۶٪	۹/۴۱٪
۲۰	-۰/۴۹٪	۱۴/۹۴٪	۰/۵۹٪	۰/۵۹٪	۲/۴۴٪	-۰/۲۴	-۰/۸۰	-۳/۵۱٪	۴/۲۶٪	۴/۹۴٪
۲۱	-۰/۴۴٪	۹/۴۶٪	۰/۹۰٪	۰/۸۲٪	۰/۷۷٪	-۰/۱۴	۰/۴۸	-۰/۶۳٪	۲/۲۳٪	۰/۶۳٪
۲۲	۰/۰۰٪	۶/۹۶٪	۰/۵۵٪	۰/۹۴٪	۱/۶۱٪	۰/۰۹	-۰/۱۹	-۱/۹۵٪	۳/۶۵٪	۲/۴۴٪
۲۳	۰/۳۵٪	۶/۲۰٪	۱/۲۵٪	۱/۱۷٪	۲/۴۲٪	۰/۲۶	-۰/۷۰	-۲/۲۹٪	۵/۴۲٪	۲/۸۱٪
۲۴	-۱/۰۹٪	۱۲/۶۴٪	۰/۰۲٪	-۰/۰۹٪	۰/۸۶٪	۰/۴۴	-۰/۷۵	-۱/۱۱٪	۱/۶۵٪	۱/۷۶٪
۲۵	۰/۰۸٪	۹/۸۷٪	۰/۵۴٪	۰/۵۵٪	۰/۰۷٪	-۰/۷۳	۰/۴۷	۰/۴۱٪	۰/۶۴٪	۰/۰۰٪
۲۶	۲/۶۶٪	۴/۷۴٪	۰/۶۸٪	۰/۷۱٪	۰/۱۶٪	۰/۳۱	۲/۰۳	۰/۳۷٪	۱/۰۴٪	۰/۰۰٪
۲۷	۰/۴۲٪	۵/۵۴٪	۰/۷۶٪	۱/۰۵٪	۲/۴۴٪	۰/۲۲	۰/۱۴	-۳/۲۶٪	۵/۶۰٪	۴/۸۳٪
۲۸	-۰/۹۸٪	۱۹/۰۸٪	۰/۳۳٪	۰/۳۴٪	۰/۱۶٪	-۰/۲۳	۰/۷۲	۰/۰۰٪	۰/۵۸٪	۰/۰۰٪
۲۹	-۰/۰۵٪	۱۶/۳۶٪	۰/۳۹٪	۰/۳۲٪	۰/۵۱٪	۰/۵۳	-۰/۳۶	-۰/۳۷٪	۱/۲۶٪	۰/۴۲٪

۳۰	۲/۹۵٪	۳/۴۵٪	۰/۸۲٪	۰/۷۹٪	۰/۳۹٪	۰/۲۴	-۱/۰۲	۰/۲۴٪	۱/۴۹٪	۰/۰۰٪
کل	**۰/۸۳٪**	**۲۸/۵۵٪**	**۰/۹۷٪**	**۰/٤٨٪**	**۳/۳۲٪**	**۰/۵۹**	**۳/٦٨**	**-۱۱/۹۵٪**	**۱۳/٤٧٪**	**۲۵/۰۳٪**

جدول ۲، به بررسی عملکرد توزیع خارج از نمونه و آماره‌های توصیفی از قبیل میانگین، میانه، انحراف معیار، چولگی، کشیدگی، مینیمم و ماکسیمم بازده پرتفوی‌های حاصل‌شده از مدل $Omega - CVaR_{\alpha}$ می‌پردازد. همان‌طور که از جدول فوق مشخص است، میانگین بازده کل توزیع خارج از نمونه شاخص برابر ۰/۸۳ درصد می‌باشد، این در حالی است که میانگین بازده پرتفوی‌های حاصل‌شده از مدل پژوهش به میزان ۰/۱۴ درصد بیشتر و برابر ۰/۹۷ درصد می‌باشد. همچنین انحراف معیار بازده پرتفوی‌های حاصل‌شده از مدل فوق برابر ۳/۳۲ درصد می‌باشد، در صورتی‌که در دوره بررسی انحراف معیار شاخص برابر ۴/۲۱ درصد می‌باشد. این مورد حاکی از آن است که ریسک پرتفوی‌ها در سطوح پایین‌تری از سطح ریسک بازار قرار دارند. همچنین نتایج جدول مذکور نشان می‌دهد که تنها در پنج پنجره زمانی از سی پنجره، مقدار حداکثر افت سرمایه پرتفوی‌های حاصل‌شده از مدل پژوهش از مقدار حداکثر افت سرمایه شاخص بیشتر می‌باشد که نشان از توانایی مدل بر کنترل افت‌های شدید و ریسک‌های دنباله‌ای می‌باشد.

جدول ۳. *بررسی معیارهای همبستگی، بتا رگرسیون و خطای ردیابی میان بازده شاخص و بازده پرتفوی‌های حاصل‌شده با مدل پژوهش*

Table 3. An analysis of correlation, regression beta, and tracking error metrics between index returns and the returns of portfolios generated by the research model

پنجره زمانی	همبستگی با شاخص	بتا رگرسیون	خطای ردیابی
۱	۰/۸۱	۰/۷۹	۰/۰۲
۲	۰/۶۷	۰/۸۵	۰/۰۳
۳	۰/۳۲	۰/۵۷	۰/۰۵
۴	۰/۷۱	۱/۸۵	۰/۰۵
۵	۰/۸۶	۱/۰۶	۰/۰۴
۶	-۰/۰۱	۰/۰۰	۰/۰۸
۷	۰/۶۷	۰/۵۰	۰/۰۶
۸	۰/۸۹	۰/۶۶	۰/۰۳
۹	۰/۲۹	۰/۰۵	۰/۰۴
۱۰	۰/۲۲	۰/۰۵	۰/۰۳
۱۱	-۰/۰۱	۰/۰۰	۰/۰۳
۱۲	۰/۷۶	۰/۷۸	۰/۰۳
۱۳	۰/۷۵	۰/۰۱	۰/۰۳
۱۴	۰/۶۱	۰/۰۲	۰/۰۳
۱۵	۰/۵۴	۰/۶۶	۰/۰۲
۱۶	۰/۱۷	۰/۱۷	۰/۰۲
۱۷	۰/۵۷	۰/۰۰	۰/۰۵
۱۸	۰/۸۲	۰/۴۰	۰/۰۳
۱۹	۰/۷۸	۰/۷۴	۰/۰۳
۲۰	۰/۴۹	۰/۳۳	۰/۰۳
۲۱	۰/۱۶	۰/۰۶	۰/۰۲
۲۲	۰/۲۸	۰/۲۱	۰/۰۲
۲۳	۰/۴۷	۰/۴۲	۰/۰۳
۲۴	-۰/۰۱	۰/۰۰	۰/۰۳
۲۵	۰/۴۵	۰/۰۱	۰/۰۳

۲۶	۰/۳۸	۰/۰۲	۰/۰۴
۲۷	۰/۹۲	۰/۹۲	۰/۰۱
۲۸	-۰/۲۴	-۰/۰۱	۰/۰۴
۲۹	۰/۸۰	۰/۰۹	۰/۰۴
۳۰	۰/۱۲	۰/۰۲	۰/۰۳
کل	**۰/۵٤**	**۰/٤۳**	**۰/۰٤**

در جدول ۳، معیارهای همبستگی، بتا و خطای ردیابی بررسی شده است. نتایج نشان می‌دهد که میانگین همبستگی پرتفوی پیشنهادی با شاخص در کل دوره برابر با ۰/۵۴ و میانگین ضریب بتا معادل ۰/۴۳ است. مقدار بتای به‌دست آمده که به‌طور قابل‌ملاحظه‌ای کمتر از یک است، نشان‌دهنده ماهیت تدافعی پرتفوی پیشنهادی است؛ به این معنا که پرتفوی‌های حاصل‌شده در مواجهه با نوسانات شدید بازار، حساسیت کمتری نشان داده‌اند و ریسک سیستماتیک پایین‌تری را پذیرا شده‌اند. همچنین، میانگین خطای ردیابی در سطح ۰/۰۴ گزارش شده که نشان‌دهنده انحراف کنترل‌شده پرتفوی از شاخص مرجع در راستای دستیابی به بازده مازاد است.

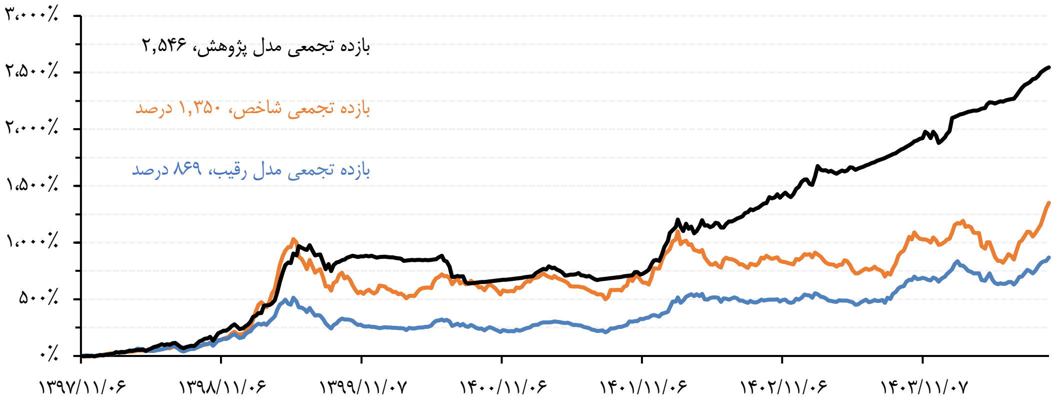
جدول ٤. *بررسی معیارهای نسبت اطلاعات و تفاوت میانگین بازده شاخص و بازده پرتفوی‌های حاصل‌شده با مدل پژوهش*

Table 4. An analysis of information ratio and mean return differentials between index returns and the returns of portfolios generated by the research model

پنجره زمانی	تفاوت میانگین‌ها	مقدار نسبت اطلاعات
۱	-۰/۴۶٪	-۰/۲۹
۲	۰/۹۲٪	۰/۲۹
۳	۰/۹۵٪	۰/۲۰
۴	۰/۷۰٪	۰/۱۳
۵	-۰/۴۳٪	-۰/۱۱
۶	-۲/۷۵٪	-۰/۳۲
۷	۲/۳۱٪	۰/۳۷
۸	۰/۴۲٪	۰/۱۳
۹	۱/۲۱٪	۰/۲۶
۱۰	۰/۲۴٪	۰/۰۷
۱۱	-۱/۷۵٪	-۰/۴۸
۱۲	-۱/۵۱٪	-۰/۵۰
۱۳	۱/۳۹٪	۰/۳۸
۱۴	-۱/۳۵٪	-۰/۴۷
۱۵	۰/۳۷٪	۰/۱۹
۱۶	۰/۹۷٪	۰/۵۴
۱۷	-۱/۴۸٪	-۰/۳۰
۱۸	۰/۲۳٪	۰/۰۷
۱۹	۰/۶۴٪	۰/۲۰
۲۰	۱/۰۸٪	۰/۳۲
۲۱	۱/۳۵٪	۰/۵۷
۲۲	۰/۵۴٪	۰/۲۳
۲۳	۰/۹۰٪	۰/۳۲
۲۴	۱/۱۱٪	۰/۳۸

۲۵	۰/۴۶٪	۰/۱۷
۲۶	-۱/۹۷٪	-۰/۴۵
۲۷	۰/۳۴٪	۰/۳۳
۲۸	۱/۳۱٪	۰/۳۲
۲۹	۰/۴۵٪	۰/۱۱
۳۰	-۲/۱۲٪	-۰/۶۰
کل	**۰/۱٤٪**	**۰/۰٤**

در جدول ۴، نسبت اطلاعات و تفاوت میانگین بازدهی مورد تحلیل قرار گرفته است. میانگین تفاوت بازده هفتگی پرتفوی نسبت به شاخص در کل ۳۰ پنجره، ۰/۱۴ درصد مثبت بوده و میانگین نسبت اطلاعات نیز ۰/۰۴ محاسبه شده است. اگرچه برتری عملکرد در مقیاس هفتگی و کوتاه‌مدت ممکن است اندک به نظر برسد، اما انباشت این تفاوت‌ها در بلندمدت منجر به شکاف عملکردی قابل‌توجهی شده است.



شکل ۱. *بازده تجمعی شاخص و پرتفوی‌های حاصل‌شده از مدل پژوهش و مدل رقیب برای داده‌های خارج از نمونه*

Figure 1. Cumulative returns of the index, research model portfolios, and the rival model for out-of-sample data

مطابق شکل ۱، بازده تجمعی مدل پژوهش در انتهای دوره بررسی به رقم خیره‌کننده ۲,۵۴۶ درصد رسیده است. این در حالی است که بازده تجمعی شاخص بورس در همین دوره ۱,۳۵۰ درصد و بازده تجمعی مدل رقیب ۸۶۹ درصد بوده است. این نتایج تأیید می‌کند که چارچوب پیشنهادی توانسته است با اختلاف حدود ۱,۱۹۶ درصدی نسبت به شاخص مرجع، عملکرد خود را در ردیابی بهبودیافته به‌خوبی اثبات کند.

۵. بحث و نتیجه‌گیری

پژوهش حاضر با هدف توسعه یک مدل بهینه‌سازی نوین برای ردیابی بهبودیافته شاخص، با تلفیق نسبت امگا و معیار ریسک $CVaR$ انجام شد. هدف اصلی، دستیابی به بازدهی فراتر از شاخص هم‌زمان با کنترل سخت‌گیرانه ریسک‌های نامطلوب و حدی بود.

یافته‌های پژوهش منجر به نتایج کلیدی زیر شده است:

۱)**برتری در افق بلندمدت:** مدل $Omega - CVaR$ توانست بازده تجمعی بسیار بالاتری (۲,۵۴۶ درصد) نسبت به شاخص و مدل رقیب ایجاد کند. این برتری لزوماً ناشی از غلبه در تمام هفته‌ها نیست، بلکه حاصل مدیریت بهینه افت‌ها در دوره‌های نزولی است.

۲) **کنترل ریسک نامطلوب:** استفاده از قید $CVaR$ باعث شده است که میانگین زیان‌های بزرگ در ناحیه دنباله توزیع محدود شود. این ویژگی در کنار بتای پایین (۰/۴۳)، مانع از سقوط شدید ارزش پرتفوی در ریزش‌های بازار شده و اجازه می‌دهد در دوره‌های بازیابی، اثر ترکیب سود با قدرت بیشتری عمل کند.

۳) **تضاد عملکرد کوتاه‌مدت و بلندمدت:** نتایج آزمون‌های آماری نشان داد که برتری مدل در افق‌های هفتگی همیشه معنادار نیست. این موضوع با ماهیت تدافعی مدل سازگار است؛ چراکه در دوره‌های صعودی پرشتاب، پرتفوی به دلیل محافظه‌کاری ممکن است از شاخص عقب بماند، اما پایداری آن در کل دوره، بازده نهایی را تضمین می‌کند.

در مجموع، می‌توان نتیجه گرفت که ترکیب نسبت امگا به‌عنوان معیار کارایی و $CVaR$ به‌عنوان معیار کنترل ریسک، ابزاری کارآمد برای سرمایه‌گذاران نهادی و مدیران صندوق‌های شاخصی در بازارهای پرنوسانی مانند بورس تهران است. این چارچوب به‌ویژه برای سرمایه‌گذارانی که نسبت به زیان‌های شدید حساس هستند و در عین حال به دنبال بهره‌مندی از روند صعودی بلندمدت بازار هستند، توصیه می‌شود. برای پژوهش‌های آتی، پیشنهاد می‌شود محدودیت‌های نقدشوندگی و هزینه‌های معاملاتی متغیر نیز در مدل لحاظ گردد تا واقع‌گرایی آن دوچندان شود.

منابع

Ahmed, P., & Nanda, S. (2005). Performance of enhanced index and quantitative equity funds. *Financial Review*, *40*(4), 459–479. https://doi.org/10.1111/j.1540-6288.2005.00119.x

Alexander, C., & Dimitriu, A. (2005). Indexing and Statistical Arbitrage. *The Journal of Portfolio Management*, *31*(2), 50–63. https://doi.org/10.3905/jpm.2005.470578

Ansari, H. , Behzadi, A. and Tondnevis, F. (2019). Enhanced Index Tracking with a Two-Stage Mixed Integer Programing Model and Pattern Search Algorithm. *Financial Management Strategy*, *7*(4), 1-22. doi: 10.22051/jfm.2019.24888.1998 (in persian)

Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J., & Heath, D. (1999). Coherent Measures of Risk. *Mathematical Finance*, *9*(3), 203–228. https://doi.org/10.1111/1467-9965.00068

Beasley, J. E., Meade, N., & Chang, T.-J. (2003). An evolutionary heuristic for the index tracking problem. *European Journal of Operational Research*, *148*(3), 621–643. https://doi.org/10.1016/S0377-2217(02)00425-3

Biglova, A., Ortobelli, S., Rachev, S., & Stoyanov, S. (2004). Different approaches to risk estimation in portfolio theory. In *Journal of Portfolio Management* (Vol. 31, Issue 1, pp. 103–112). https://doi.org/10.3905/jpm.2004.443328

Brinson, G. P., Hood, L. R., & Beebower, G. L. (1995). Determinants of Portfolio Performance. *Financial Analysts Journal*, *42*(1), 39–44. https://doi.org/10.2469/faj.v42.n4.39

Brooks, V. L., & Reid, I. A. (1983). Effects of blockade of brain angiotensin II receptors in conscious, sodium-deprived dogs. *The American Journal of Physiology*, *245*(6), R881-7. https://doi.org/10.1002/9781119196679

Bruni, R., Cesarone, F., Scozzari, A., & Tardella, F. (2015). A linear risk-return model for enhanced indexation in portfolio optimization. *OR Spectrum*, *37*(3), 735–759. https://doi.org/10.1007/s00291-014-0383-6

Bruni, R., Cesarone, F., Scozzari, A., & Tardella, F. (2017). On exact and approximate stochastic dominance strategies for portfolio selection. *European Journal of Operational Research*, *259*(1), 322–329. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2016.10.006

Buckley, I. R. C., & Korn, R. (1998). Optimal Index Tracking Under Transaction Costs and Impulse Control. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, *01*(03), 315–330. https://doi.org/10.1142/S0219024998000187

Canakgoz, N. A., & Beasley, J. E. (2009). Mixed-integer programming approaches for index tracking and enhanced indexation. *European Journal of Operational Research*, *196*(1), 384–399. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2008.03.015

Charnes, A., & Cooper, W. W. (1962). Programming with linear fractional functionals. *Naval Research Logistics Quarterly*, *9*(3–4), 181–186. https://doi.org/10.1002/nav.3800090303

de Paulo, W. L., de Oliveira, E. M., & do Valle Costa, O. L. (2016). Enhanced index tracking optimal portfolio selection. *Finance Research Letters*, *16*, 93–102. https://doi.org/10.1016/j.frl.2015.10.005

Dose, C., & Cincotti, S. (2005). Clustering of financial time series with application to index and enhanced index tracking portfolio. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, *355*(1), 145–151. https://doi.org/10.1016/j.physa.2005.02.078

Dueck, G., & Scheuer, T. (1990). Threshold accepting: A general purpose optimization algorithm appearing superior to simulated annealing. *Journal of Computational Physics*, *90*(1), 161–175. https://doi.org/10.1016/0021-9991(90)90201-B

Eyvazloo, R., Fallahpour, S., & Dehghani Ashkezari, M. (2022). Index tracking using Two-tail Mixed Conditional Value-at-risk in Tehran Stock Exchange. *Financial Research Journal*, *23*(4), 545–563. https://doi.org/10.22059/frj.2020.289344.1006927 (in persian)

Eyvazloo, R. , Shafizadeh, M. and Ghahramani, A. (2017). Index Tracking and Enhanced Indexing Using Co-integration and Correlation Approaches. *Financial Research Journal*, *19*(3), 457-474. doi: 10.22059/jfr.2018.245816.1006551 (in persian)

Filippi, C., Guastaroba, G., & Speranza, M. G. (2016). A heuristic framework for the bi-objective enhanced index tracking problem. *Omega*, *65*, 122–137. https://doi.org/10.1016/j.omega.2016.01.004

Goel, A., Sharma, A., & Mehra, A. (2018). Index tracking and enhanced indexing using mixed conditional value-at-risk. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, *335*, 361–380. https://doi.org/10.1016/j.cam.2017.12.015

Guastaroba, G., Mansini, R., Ogryczak, W., & Speranza, M. G. (2016). Linear programming models based on Omega ratio for the Enhanced Index Tracking Problem. *European Journal of Operational Research*, *251*(3), 938–956. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2015.11.037

Guastaroba, G., Mansini, R., Ogryczak, W., & Speranza, M. G. (2020). Enhanced index tracking with CVaR-based ratio measures. *Annals of Operations Research*, *292*(2), 883–931. https://doi.org/10.1007/s10479-020-03518-7

Guastaroba, G., & Speranza, M. G. (2012). Kernel Search: An application to the index tracking problem. *European Journal of Operational Research*, *217*(1), 54–68. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2011.09.004

Hanifi, F., Bahrololum, M. M., and Javadi, B. (2009). Design and comparative analysis of metaheuristic algorithms for implementing index-based investment in the Tehran Stock Exchange. *Financial Management Outlook*, Issue 32, pp. 89–108. (in persian)

Huyer, W., & Neumaier, A. (1999). Global Optimization by Multilevel Coordinate Search. *Journal of Global Optimization*, *14*(4), 331–355. https://doi.org/10.1023/A:1008382309369

Jansen, R., & van Dijk, R. (2002). Optimal Benchmark Tracking with Small Portfolios. *The Journal of Portfolio Management*, *28*(2), 33–39. https://doi.org/10.3905/jpm.2002.319830

Keating, C., & Shadwick, W. F. (2002). A Universal Performance Measure. *Journal of Perfor-Mance Measurement*, *6*(1), 59–84.

Konno, H., & Yamazaki, H. (1991). Mean-Absolute Deviation Portfolio Optimization Model and Its Applications to Tokyo Stock Market. *Management Science*, *37*(5), 519–531.

https://doi.org/10.1287/mnsc.37.5.519

Koshizuka, T., Konno, H., & Yamamoto, R. (2009). Index-plus-Alpha Tracking Subject to Correlation Constraint. *International Journal of Optimization: Theory, Methods and Applications*, *1*, 215–224.

Lejeune, M. A. (2012). Game Theoretical Approach for Reliable Enhanced Indexation. *Decision Analysis*, *9*(2), 146–155. https://doi.org/10.1287/deca.1120.0239

Li, Q., Sun, L., & Bao, L. (2011). Enhanced index tracking based on multi-objective immune algorithm. *Expert Systems with Applications*, *38*(5), 6101–6106. https://doi.org/10.1016/j.eswa.2010.11.001

Mansini, R. (2003). LP solvable models for portfolio optimization: a classification and computational comparison. *IMA Journal of Management Mathematics*, *14*(3), 187–220. https://doi.org/10.1093/imaman/14.3.187

Mansini, R., Ogryczak, W., & Speranza, M. G. (2003). On LP Solvable Models for Portfolio Selection. *Informatica*, *14*(1), 37–62. https://doi.org/10.15388/informatica.2003.003

Markowitz, H. (1952). PORTFOLIO SELECTION*. *The Journal of Finance*, *7*(1), 77–91. https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1952.tb01525.x

Martin, R. D., Rachev, S., & Siboulet, F. (2005). *PHI-ALPHA OPTIMAL PORTFOLIOS & EXTREME RISK MANAGEMENT*.

Mausser, H., Saunders, D., & Seco, L. (2006). Optimizing Omega. *RISK-LONDON-RISK MAGAZINE LIMITED*.

Meade, N., & Beasley, J. E. (2011). Detection of momentum effects using an index out-performance strategy. *Quantitative Finance*, *11*(2), 313–326. https://doi.org/10.1080/14697680903460135

Meade, N., & Salkin, G. R. (1989). Index Funds—Construction and Performance Measurement. *Journal of the Operational Research Society*, *40*(10), 871–879. https://doi.org/10.1057/jors.1989.155

Nabizade, A. , Gharehbaghi, H. and Behzadi, A. (2017). Index Tracking Optimization under down Side Beta and Evolutionary Based Algorithms. *Financial Research Journal*, *19*(2), 319-340. doi: 10.22059/jfr.2017.226501.1006374 (in persian)

Rahmani, A., & Dehghani Ashkezari, M. (2021). Enhanced indexing using a discrete Markov chain model and mixed conditional value-at-risk. *International Journal of Finance & Managerial Accounting*, *6*(22), 69–80. https://ijfma.srbiau.ac.ir/article_17475.html

Rockafellar, R. T., & Uryasev, S. (2000). Optimization of conditional value-at-risk. *The Journal of Risk*, *2*(3), 21–41. https://doi.org/10.21314/JOR.2000.038

Rockafellar, R. T., & Uryasev, S. (2002). Conditional value-at-risk for general loss distributions. *Journal of Banking & Finance*, *26*(7), 1443–1471. https://doi.org/10.1016/S0378-4266(02)00271-6

Roll, R. (1992). A Mean/Variance Analysis of Tracking Error. *The Journal of Portfolio Management*, *18*(4), 13–22. https://doi.org/10.3905/jpm.1992.701922

Rudd, A. (1980). Optimal Selection of Passive Portfolios. *Financial Management*, *9*(1), 57. https://doi.org/10.2307/3665314

Sant'Anna, L. R., Filomena, T. P., & Caldeira, J. F. (2017). Index tracking and enhanced indexing using cointegration and correlation with endogenous portfolio selection. *Quarterly Review of Economics and Finance*, *65*, 146–157. https://doi.org/10.1016/j.qref.2016.08.008

Schoenfeld, S. A. (2004). *Active Index Investing: maximizing portfolio performance and minimizing risk through global index strategies*.

Sehgal, R., Sharma, A., & Mansini, R. (2023). Worst-case analysis of Omega-VaR ratio optimization model. *Omega*, *114*, 102730. https://doi.org/10.1016/j.omega.2022.102730

Sharma, A., Utz, S., & Mehra, A. (2017). Omega-CVaR portfolio optimization and its worst case analysis. *OR Spectrum*, *39*(2), 505–539. https://doi.org/10.1007/s00291-016-0462-y

Sharpe, W. F. (1966). Mutual Fund Performance, Part 2: Supplement on Security Prices. *The Journal of Business,The University of Chicago*, *39*(1), 119–138. https://www.jstor.org/stable/2351741

Sharpe, W. F. (1971). Mean-Absolute-Deviation Characteristic Lines for Securities and Portfolios. *Management Science*, *18*(2), B-1-B-13. https://doi.org/10.1287/mnsc.18.2.b1

Sortino, F. A., Meer, R. Van Der, & Plantinga, A. (1999). The Dutch Triangle. *The Journal of Portfolio Management*, *26*(1), 50–57. https://doi.org/10.3905/jpm.1999.319775

Sortino, F. A., & Price, L. N. (1994). Performance Measurement in a Downside Risk Framework. *The Journal of Investing*, *3*(3), 59–64. https://doi.org/10.3905/joi.3.3.59

Treynor, J. L., & Black, F. (1973). How to Use Security Analysis to Improve Portfolio Selection. *The Journal of Business*, *46*(1), 66–86. http://www.jstor.org/stable/2351280

Varsei, M., and Shams, N. (2010). A Creative Approach to Solving the Index Tracking Portfolio Problem and Its Implementation for the First Time in the Tehran Stock Exchange TEPIX, *8th International Management Conference*, Tehran, https://civilica.com/doc/99509 (in persian)

Weng, Y.-C., & Wang, R. (2017). Do Enhanced Index Funds Truly Have Enhanced Performance? Evidence from the Chinese Market. *Emerging Markets Finance and Trade*, *53*(4), 819–834. https://doi.org/10.1080/1540496X.2015.1105637

Wu, L.-C., Chou, S.-C., Yang, C.-C., & Ong, C.-S. (2007). Enhanced Index Investing Based on Goal Programming. *The Journal of Portfolio Management*, *33*(3), 49–56. https://doi.org/10.3905/jpm.2007.684753

Yitzhaki, S. (1982). Stochastic Dominance, Mean Variance, and Gini's Mean Difference. *The American Economic Review*, *72*(1), 178–185. http://www.jstor.org/stable/1808584